

Übungsblatt # 11 zur Vorlesung Klassische Theoretische Physik III

Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theoretische Festkörperphysik

Karim Mnasri (karim.mnasri@kit.edu)

Prof. Dr. Carsten Rockstuhl (carsten.rockstuhl@kit.edu)

1. Punktladung (3 Punkte)

Das Koordinatensystem wird so gewählt, daß die Ebenen bei $x = 0$ und $y = 0$ verlaufen. Die Ladung q_0 befindet sich im ersten Quadranten ($x > 0, y > 0$) am Ort $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, 0)$. Das Potential bei $x = 0$ und $y = 0$ soll verschwinden.

Gesucht: Green'sche Funktion für den 1. Quadranten. Dazu plazieren wir die drei folgenden Scheinladungen: $q_1 = -q_0$, $q_2 = -q_0$ und $q_3 = +q_0$ an die Positionen $\mathbf{r}_1 = (-x_0, y_0, 0)$, $\mathbf{r}_2 = (x_0, -y_0, 0)$ und $\mathbf{r}_3 = (-x_0, -y_0, 0)$.

Das Potential ergibt sich dann zu

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|} + \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_3|} \right], \quad \forall \mathbf{r} \in \{(x, y, z) : x \geq 0, y \geq 0\} \quad (1)$$

$$\phi(\mathbf{r}) = 0, \quad \forall \mathbf{r} \notin \{(x, y, z) : x \geq 0, y \geq 0\} \quad (2)$$

2. Homogene Kugel (11 Punkte)

a)

$$\rho = \begin{cases} \rho_0 & r \geq R_1 \\ 0 & R_1 < r \leq R_2 \\ 0 & R_2 < r \leq R_3 \\ 0 & r > R_3 \end{cases} \quad (3)$$

Wir nutzen zur Lösung das Gauss'sche Gesetz

$$\int_{(V)} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{f} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}) dV \quad (4)$$

Aus Symmetriegründen ist das elektrische Feld radialsymmetrisch, also $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(\mathbf{r})\mathbf{e}_r$. Damit ist $\mathbf{E}$ auf der Integrationsoberfläche (Kugelschale) konstant und das Integral liefert

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{innerhalb } V_r} \quad (5)$$

Dies liefert endlich:

$$E(r) = \begin{cases} \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} r & r \leq R_1 \\ \frac{\rho_0 R_1^3}{3\epsilon_0} \frac{1}{r^2} & R_1 < r < R_2 \\ 0 & R_2 \leq r \leq R_3 \\ \frac{\rho_0 R_1^3}{3\epsilon_0} \frac{1}{r^2} & r > R_3 \end{cases} \quad (6)$$

Das Potential (mit $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$) ergibt sich einfach durch aufintegrieren zu $\Phi(r) = -\int E(r)dr$. Die Integrationskonstanten werden so gewählt, daß Φ stetig übergeht.

$$\Phi(r) = \begin{cases} \frac{\rho_0}{6\epsilon_0} (3R_1^2 - r^2) & r \leq R_1 \\ \frac{\rho_0 R_1^3}{3\epsilon_0} \frac{1}{r} & R_1 < r < R_2 \\ \frac{\rho_0 R_1^3}{3\epsilon_0 R_2} & R_2 \leq r \leq R_3 \\ \frac{\rho_0 R_1^3}{3\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_2} \right) & r > R_3 \end{cases} \quad (7)$$

b)

Die induzierte Ladung auf dem inneren Rand bei R_2 entspricht der negativen Gesamtladung. Die induzierte Ladung bei R_3 entspricht der positiven Gesamtladung, sodaß insgesamt die Gesamtladung des Metalls verschwindet:

$$\begin{aligned} Q_{\text{ind}}(R_2) &= -\frac{4\pi R_1^3}{3} \rho_0 \\ Q_{\text{ind}}(R_3) &= +\frac{4\pi R_1^3}{3} \rho_0 \\ Q_{\text{Metall, Gesamt}} &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Aufgabe 3):

(a) Die induzierte Spannung ist gegeben durch:

$$U_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi_{\text{mag}}}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint \mathbf{B} d\mathbf{f} \quad (9)$$

$$U_{\text{ind}} = -\frac{d}{dt} B_0 L^2 \cos \omega t = B_0 L^2 \omega \sin \omega t \quad (10)$$

(b) Hier gibt es mehrere Varianten zur Lösung. Ich geb erst einmal die kürzeste und schnellste Lösung an.

- Schnellste Variante: Das Magnetfeld schaut in z-Richtung $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{e}_z$ und die Schleife nimmt einen Winkel α dazu ein. Die Flächennormale der Leiterschleife ist beschrieben durch: $\mathbf{e}_m = (\pm \sin \alpha \mathbf{e}_y - \cos \alpha \mathbf{e}_z)$, was gleichzeitig auch die Richtung des Dipolmoments der Schleife angibt. Für $\alpha = 0$ zeigt das Dipolmoment in negative z-Richtung, wie es sich für einen Strom im Uhrzeigersinn „gehört“. Das $\pm$ der y-Komponente läßt die Wahl wie der Student den Winkel annimmt.

$$\mathbf{D} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{m} \times \mathbf{B} \quad (11)$$

Hierbei ist $\mathbf{D}$ das Drehmoment auf die Leiterschleife und $\mathbf{m}$ bezeichnet das magnetische Dipolmoment der Schleife.

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \mu_0 \int dV' (\mathbf{r}' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}')) = \frac{1}{2} \mu_0 I \int ds (\mathbf{s} \times \mathbf{e}_s) \quad (12)$$

$\mathbf{e}_s$ bezeichnet den Einheitsvektor entlang der Leiterschleife.

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \mu_0 I \int ds (\mathbf{s} \times \mathbf{e}_s) = \frac{1}{2} \mu_0 I \int 2 d\mathbf{f} = \mu_0 I \mathbf{F} \quad (13)$$

Hierbei bezeichnet $\mathbf{F}$ die gerichtete Fläche der Leiterschleife.

In unserem Fall ergibt dies einfach:

$$\mathbf{m} = \mu_0 I L^2 (\pm \sin \alpha \mathbf{e}_y - \cos \alpha \mathbf{e}_z) \quad (14)$$

Hierbei wird im Uhrzeigersinn über die Leiterschleife integriert, oder anders gesprochen: der Strom fließt im Uhrzeigersinn. Wer mit der Umformung des Linienintegrals in ein Flächenintegral in Gl.13 nicht ganz glücklich ist, dem sei versichert, daß bei einer Auswertung des Linienintegrals zu Fuß tatsächlich das gleiche Ergebnis herauskommt, wobei der Koordinatenursprung im Zentrum der Schleife sitzt.

Es ergibt sich also für das Drehmoment:

$$\mathbf{D} = I L^2 B_0 \{(\pm \sin \alpha \mathbf{e}_y - \cos \alpha \mathbf{e}_z) \times \mathbf{e}_z\} = \pm I L^2 B_0 \sin \alpha \mathbf{e}_x \quad (15)$$

- Zweite Variante (langsam): Das Drehmoment/Kraft wird direkt über die Lorentzkraft bestimmt:

$$\mathbf{D} = I \int \mathbf{r}_D \times \{d\mathbf{s} \times \mathbf{B}\} \quad (16)$$

$\mathbf{r}_D$ bezeichnet den Vektor von der Drehachse zum entsprechenden Aufpunkt auf der Leiterschleife ($\mathbf{r}_D \perp x$ -Achse).

Jetzt wird für die Einfachheit der Rechnung die Schleife in der xy-Ebene fixiert und das Magnetfeld nimmt einen Winkel α mit der z-Achse ein: $\mathbf{B} = B_0(\pm \sin \alpha \mathbf{e}_y + \cos \alpha \mathbf{e}_z)$.

$$\begin{aligned} \mathbf{D} = & IB_0 \int_0^L ds \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} s \times \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ \pm \sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix} \\ & + IB_0 \int_0^L ds \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (L-s) \times \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ \pm \sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix} \\ & + IB_0 \int_0^L ds \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} (s) \times \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ \pm \sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix} \\ & + IB_0 \int_0^L ds \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} (L-s) \times \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ \pm \sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Terme 1&3 und 2&4 sind identisch. Die Gleichung läßt sich also weiter vereinfachen zu:

$$\mathbf{D} = IB_0 \int_0^L ds \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} s \times \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ -\cos \alpha \\ \pm \sin \alpha \end{pmatrix} + IB_0 \int_0^L ds \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (L-s) \times \begin{pmatrix} -\cos \alpha \\ -\cos \alpha \\ \pm \sin \alpha \end{pmatrix} \quad (17)$$

Das ergibt schließlich und endlich:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= IB_0 \frac{1}{2} L^2 \begin{pmatrix} \pm \sin \alpha \\ 0 \\ -\cos \alpha \end{pmatrix} + IB_0 \left[L^2 - \frac{1}{2} L^2 \right] \begin{pmatrix} \pm \sin \alpha \\ 0 \\ \cos \alpha \end{pmatrix} \\ &= \pm IB_0 L^2 \sin \alpha \mathbf{e}_x \end{aligned} \quad (18)$$

Lösung zu 4.:

Ein Leiter besitzt frei bewegliche Ladungen, welche dem Feld beliebig folgen können und das Innere des Leiters zu einem Gebiet konstanten Potentials machen. Damit ist

das Innere des Leiters feldfrei ($E = -\text{grad}\varphi$). Wegen $\text{rot}\mathbf{E} = 0$ gilt in der Elektrostatik $\oint \mathbf{E} d\mathbf{r} = 0$. Für einen Integrationsweg parallel zur Oberfläche, der die Oberfläche umschließt folgt somit, dass die Tangentialkomponente des Außenfeldes identisch verschwindet. Somit verbleibt für das Außenfeld nur noch die Normalenkomponente.

Lösung zu 5.:

a) O.B.d.A. sei die Zylinderachse die z -Achse. Für das Coulomb-geeichte Vektorpotential $\mathbf{A}$ gilt die Poissonsgleichung $\Delta\mathbf{A} = -\mu_0\mathbf{j}$, so dass $\mathbf{A}$ letztendlich nur eine Komponente in z -Richtung, A_z genannt, aufweist. Auf Grund der Rotationssymmetrie ist A_z von φ unabhängig. Mit der zusätzlichen Invarianz in z -Richtung ergibt sich schlußendlich $A_z = A_z(\rho)$. Mit den nützlichen Beziehungen am Aufgabenende ist $\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial \rho}\mathbf{e}_\varphi$. Folglich besitzen $\mathbf{B}$ und $\mathbf{H}$ nur φ -Komponenten, die wiederum nicht von z und φ abhängen dürfen.

b) Obige Symmetriebetrachtungen, $\text{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j}$ und der Satz von Stokes liefern

$$\mathbf{H}(\rho, \varphi, z) = H_\varphi(\rho)\mathbf{e}_\varphi = \frac{j_0 R^2}{2\rho}\mathbf{e}_\varphi, \quad \rho \geq R \quad (19)$$

$$\mathbf{H}(\rho, \varphi, z) = H_\varphi(\rho)\mathbf{e}_\varphi = \frac{j_0 \rho}{2}\mathbf{e}_\varphi, \quad \rho < R \quad (20)$$

Als $\mathbf{B}$ geschrieben

$$\mathbf{B}(\rho, \varphi, z) = B_\varphi(\rho)\mathbf{e}_\varphi = \frac{\mu_0 j_0 R^2}{2\rho}\mathbf{e}_\varphi, \quad \rho \geq R \quad (21)$$

$$\mathbf{B}(\rho, \varphi, z) = B_\varphi(\rho)\mathbf{e}_\varphi = \frac{\mu_0 j_0 \rho}{2}\mathbf{e}_\varphi, \quad \rho < R \quad (22)$$

Weiter gilt noch aus der a): $A_z = -\int B_\varphi d\rho$, also

$$A(\rho, \varphi, z) = A_z(\rho)\mathbf{e}_z = -\left(\frac{\mu_0 j_0 R^2}{2} \ln(\rho) + C\right)\mathbf{e}_z, \quad \rho \geq R \quad (23)$$

$$A(\rho, \varphi, z) = A_z(\rho)\mathbf{e}_z = -\frac{\mu_0 j_0 \rho^2}{4}\mathbf{e}_z, \quad \rho < R, \quad (24)$$

wobei C so angepasst werden muss, dass A_z eine stetige Funktion ist, da sie einer Poissonsgleichung genügt. Also

$$A(\rho, \varphi, z) = A_z(\rho)\mathbf{e}_z = -\left(\frac{\mu_0 j_0 R^2}{2} \ln(\rho) - \frac{\mu_0 j_0 R^2}{2}(\ln(R) - \frac{1}{2})\right)\mathbf{e}_z, \quad \rho \geq R \quad (25)$$

$$A(\rho, \varphi, z) = A_z(\rho)\mathbf{e}_z = -\frac{\mu_0 j_0 \rho^2}{4}\mathbf{e}_z, \quad \rho < R, \quad (26)$$

Zusammengefasst:

$$A(\rho, \varphi, z) = A_z(\rho)\mathbf{e}_z = -\frac{\mu_0 j_0 R^2}{2} \left(\ln(\rho) - \ln(R) + \frac{1}{2}\right)\mathbf{e}_z, \quad \rho \geq R \quad (27)$$

$$A(\rho, \varphi, z) = A_z(\rho)\mathbf{e}_z = -\frac{\mu_0 j_0 \rho^2}{4}\mathbf{e}_z, \quad \rho < R, \quad (28)$$

c) $w_{\text{mag}} = \frac{B^2}{2\mu_0}$, also

$$w_{\text{mag}}(\rho, \varphi, z) = \frac{\mu_0 j_0^2 R^4}{8\rho^2}, \quad \rho \geq R \quad (29)$$

$$w_{\text{mag}}(\rho, \varphi, z) = \frac{\mu_0 j_0^2 \rho^2}{8}, \quad \rho < R \quad (30)$$

Lösung zu 6.:

a) Quasistationarität, also $\dot{\mathbf{D}} \ll \mathbf{j}$ als Voraussetzung sei gegeben. Die Divergenz von $\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}$ liefert dann $0 = \text{div} \mathbf{j}$. Darauf den Gaußschen Satz losgelassen liefert den Knotensatz, der besagt, dass die Summe aller Ströme zu einem Knoten identisch verschwindet.

Satz von Stokes auf $\text{rot} \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}$ liefert $\oint \mathbf{E} d\mathbf{r} = -\dot{\Phi}$ mit Φ als dem magnetischen Fluss. Interpretierend erhält man: die Summe aller Spannungen entlang einer Masche ist gleich der induzierten Spannung, wobei Spannungsquellenspannungen ein negatives Vorzeichen bekommen und sich die induzierte Spannung auch als $-\sum_k L_{ik} \dot{I}_k$ ausdrücken lässt.

$$\sum_{j=\text{Bauteile der } l\text{-ten Masche}} U_{jl} + \sum_k L_{ik} \dot{I}_k = U_{l \text{ ext}} \quad (31)$$

b)

$$U_C + U_R = U_{\text{ext}} = 0 \Rightarrow U_C = -U_R = -I_R R \quad (32)$$

$$L \dot{I}_L - U_R = 0 \Rightarrow \dot{I}_L = U_R / L = I_R R / L \Rightarrow I_R = \dot{I}_L L / R \quad (33)$$

$$I_R + I_L = I_C \quad (34)$$

$$U_C = Q_C / C \Rightarrow \dot{U}_C = I_C / C \Rightarrow -\dot{I}_R R = I_C / C \Rightarrow I_C = -\dot{I}_R R C = -\ddot{I}_L L C \quad (35)$$

die letzten drei Gleichungen zusammen liefern dann:

$$\dot{I}_L L / R + I_L = -\ddot{I}_L L C \quad (36)$$

Also

$$\ddot{I}_L R L C + \dot{I}_L L + I_L R = 0 \quad (37)$$

Resonanzfrequenzbestimmung durch den Ansatz $I = I_0 \exp(i\omega t)$

$$-\omega^2 R L C + i\omega L + R = 0 \Rightarrow \omega^2 - i\omega / R C - 1 / L C = 0 \quad (38)$$

$$\omega = i / 2 R C \pm \sqrt{-1 / 4 R^2 C^2 + 1 / L C} \quad (39)$$

Die Resonanzfrequenz ω_0 ist der Realteil von ω , also $\omega_0 = \sqrt{1 / L C - 1 / 4 R^2 C^2}$.

c)

$$U_C + U_R = U_{\text{ext}} \Rightarrow \ddot{U}_C = \ddot{U}_{\text{ext}} - \ddot{U}_R \quad (40)$$

$$L \dot{I}_L - U_R = 0 \Rightarrow \dot{I}_L = U_R / L \quad (41)$$

$$I_R + I_L = I_C \Rightarrow \dot{I}_R + \dot{I}_L = \dot{I}_C \quad (42)$$

$$U_C = Q_C / C \Rightarrow \ddot{U}_C = \dot{I}_C / C \quad (43)$$

Also

$$\dot{U}_R/R + U_R/L = C(\ddot{U}_{ext} - \ddot{U}_R) \quad (44)$$

Also

$$\ddot{U}_R + \dot{U}_R/RC + U_R/LC = \ddot{U}_{ext} \quad (45)$$

Ansatz $U_R = U_{R0} \exp(i\omega t)$

$$-U_{R0}\omega^2 + U_{R0}i\omega/RC + U_{R0}/LC = -U_0\omega^2 \quad (46)$$

$$U_{R0}(-\omega^2 + i\omega/RC + 1/LC) = -U_0\omega^2 \quad (47)$$

$$U_{R0} = -U_0\omega^2 / (-\omega^2 + 1/LC + i\omega/RC) \quad (48)$$

$$U_{R0} = -U_0\omega^2 (-\omega^2 + 1/LC - i\omega/RC) / (\omega^4 - 2\omega^2/LC + 1/L^2C^2 + \omega^2/R^2C^2) \quad (49)$$

Amplitude

$$|U_{R0}| = U_0\omega^2 / \sqrt{\omega^4 - 2\omega^2/LC + 1/L^2C^2 + \omega^2/R^2C^2} \quad (50)$$

Phase

$$\phi = \arctan\left(\frac{-\omega/RC}{-\omega^2 + 1/LC}\right) = \arctan\left(\frac{\omega L}{(\omega^2 LC - 1)R}\right) \quad (51)$$

Grenzfall $R \rightarrow \infty$:

$$U_{R0} = -U_0\omega^2 (-\omega^2 + 1/LC - i\omega/RC) / (\omega^4 - 2\omega^2/LC + 1/L^2C^2 + \omega^2/R^2C^2) \quad (52)$$

$$= U_0\omega^2 (\omega^2 - 1/LC) / (\omega^4 - 2\omega^2/LC + 1/L^2C^2) \quad (53)$$

$$= U_0\omega^2 / (\omega^2 - 1/LC) \quad (54)$$

$$\phi = 0 \quad (55)$$