

Übungsblatt # 12 zur Vorlesung Klassische Theoretische Physik III Lösungen zu den Übungen

Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theoretische Festkörperphysik

Karim Mnasri (karim.mnasri@kit.edu)

Prof. Dr. Carsten Rockstuhl (carsten.rockstuhl@kit.edu)

Übung 1 - Mathematischer Einschub: Fourier-Transformation (1+2=3 Punkte)

(a) Die Fouriertransformation der Gauß-Funktion lautet:

$$\begin{aligned}\tilde{g}_\sigma(k) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} e^{ikx} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma} e^{-\frac{k^2\sigma^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{x}{\sigma} - \frac{ik\sigma}{2}\right)^2} dx\end{aligned}$$

wobei hier die quadratische Ergänzung genutzt wurde: $a^2 + 2ab = (a+b)^2 - b^2$. Mit der Substitution $y = \frac{x}{\sigma} - \frac{ik\sigma}{2}$, gilt $dy = \frac{dx}{\sigma}$ und

$$\begin{aligned}\tilde{g}_\sigma(k) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma} e^{-\frac{k^2\sigma^2}{4}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \sigma dy}_{\sqrt{\pi}\sigma} \\ &= e^{-\frac{k^2\sigma^2}{4}}\end{aligned}$$

Der Limes $\sigma \rightarrow 0$ ergibt $\tilde{g}_0(k) = 1$. Dies impliziert, dass die (normierte) Gauß-Funktion gegen die Delta-Distribution konvergiert.

(b) Das Potential, multipliziert mit dem Exponentialfaktor $e^{-\alpha r}$, wird als Yukawa-Potential bezeichnet. Physikalisch bedeutet dies, dass das Potential durch massive Ladungsträger und/oder durch einer Hintergrundladung abgeschirmt wird, dabei spielt hier α als Inverse-Abschirmlänge. Die Fourier-Transformation des abgeschirmten Coulomb-Potentials lautet:

$$\tilde{V}_\alpha(k) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-\alpha r}}{r} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{r}$$

Der Übergang zu den Kugelkoordinaten $d^3\mathbf{r} = r^2 dr d\phi d(\cos(\theta))$ liefert

$$\begin{aligned}
\tilde{V}_\alpha(k) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} r^2 \frac{e^{-\alpha r}}{r} e^{ikr \cos(\theta)} d\phi d(\cos(\theta)) dr \\
&= \frac{q}{2\epsilon_0} \int_0^\infty \int_{-1}^1 r^2 \frac{e^{-\alpha r}}{r} e^{ikr \cos(\theta)} d(\cos(\theta)) dr \\
&= \frac{q}{2\epsilon_0} \int_0^\infty r e^{-\alpha r} \left[\frac{e^{ikr \cos(\theta)}}{ikr} \right]_{\cos(\theta)=-1}^{\cos(\theta)=1} dr \\
&= \frac{q}{\epsilon_0} \int_0^\infty e^{-\alpha r} \frac{\sin(kr)}{k} dr \\
&= \frac{q}{\epsilon_0} \frac{1}{k^2 + \alpha^2}
\end{aligned}$$

Dies ist das Fourier-transformierte Yukawa Potential. Um das Fourier-transformierte Coulomb Potential zu bekommen, betrachten wir den Grenzfall $\alpha \rightarrow 0$

$$\tilde{V}(k) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \tilde{V}_\alpha(k) = \frac{q}{\epsilon_0} \frac{1}{k^2}$$

Übung 2 - Elektronen in äußerem elektromagnetischen Feld (1+1+2=4 Punkte)

Die Wechselwirkung atomar gebundener Elektronen mit einem äußeren elektromagnetischen Feld ist Ursache sehr vieler auf den ersten Blick überraschender Phänomene. Es gibt mehrere Möglichkeiten, die Bewegung eines gebundenen Elektrons im äußeren Feld zu beschreiben. Die einfachste Näherung (die aber für viele Zwecke bereits ausreicht) behandelt das atomar gebundene Elektron als gedämpften harmonischen Oszillator mit Eigenfrequenz ω_0 . Die entsprechende Bewegungsgleichung ist

$$\ddot{\mathbf{r}} + \frac{1}{\tau} \dot{\mathbf{r}} + \omega_0^2 \mathbf{r} = -\frac{q}{m} \mathbf{E}. \quad (1)$$

Hierbei ist $-q$ die Ladung des Elektrons. Bisher haben wir Materialkonstanten wie ϵ_{rel} als Konstanten angesehen. Wie wir jedoch sehen werden, gilt diese Konstanz nur näherungsweise, und auch das nur in bestimmten Frequenzbereichen.

- (a) Beginnen wir mit der Bewegungsgleichung des atomaren Dipolmoments $\mathbf{p} = -q\mathbf{r}$. Einsetzen in (1) ergibt

$$\ddot{\mathbf{p}} + \frac{1}{\tau} \dot{\mathbf{p}} + \omega_0^2 \mathbf{p} = \frac{q^2}{m} \mathbf{E}. \quad (2)$$

- (b) Das atomare Dipolmoment $\mathbf{p}$ steht jedoch über die Relation $\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E}$ in direktem Zusammenhang mit dem äußeren elektromagnetischen Feld. Der hier auftretende Proportionalitätsfaktor α wird als atomare Polarisierbarkeit bezeichnet. In der Tat besteht eine unmittelbare Beziehung zwischen α und der relativen Dielektrizität ϵ , die durch die *Clausius-Mossotti-Gleichung*

$$\alpha = \frac{3 \epsilon / \epsilon_0 - 1}{n \epsilon / \epsilon_0 + 2}$$

beschrieben wird¹. Durch Einsetzen in (2) findet man

$$\left(\ddot{\mathbf{E}} + \frac{1}{\tau} \dot{\mathbf{E}} + \omega_0^2 \mathbf{E} \right) \alpha = \frac{q^2}{m} \mathbf{E}. \quad (3)$$

Im Fall eines *statischen* äußeren Feldes folgt daraus natürlich sofort

$$\alpha_0 = \frac{q^2}{m\omega_0^2}.$$

¹ n ist hier die Dichte der Elektronen.

- (c) Hängt das äußere Feld jedoch von der Zeit ab, so wird α in der Regel keine Konstante mehr sein. Ist insbesondere die Zeitabhängigkeit des äußeren Feldes $\sim e^{-i\omega t}$, so folgt durch Einsetzen in (3)

$$\left(\omega_0^2 - \omega^2 - \frac{i}{\tau}\omega\right)\alpha = \frac{q^2}{m} \implies \alpha(\omega) = \frac{q^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega/\tau}. \quad (4)$$

Im allgemeinen ist $\alpha(\omega)$ (und damit auch $\varepsilon(\omega)$) eine komplexwertige Größe. Realteil und Imaginärteil sind durch

$$\Re(\alpha) = \frac{q^2}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2/\tau^2}$$

bzw.

$$\Im(\alpha) = \frac{q^2}{m} \frac{\omega/\tau}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2/\tau^2}$$

gegeben. Sehen wir uns das Verhalten von $\Re(\alpha)$ und $\Im(\alpha)$ in Abhängigkeit von der Frequenz des äußeren Feldes ω an, so wird folgendes deutlich: Beide Kurven ändern sich rasch, wenn ω in die Nähe der Eigenfrequenz ω_0 der Elektronen kommt. Insbesondere verschwindet bei $\omega = \omega_0$ der Realteil von $\alpha(\omega)$, so dass die atomare Polarisierbarkeit für diese Frequenz rein imaginär ist. Anders sieht es aus, wenn ω weit weg von ω_0 ist. In diesem Fall ist der Imaginärteil von α verschwindend klein, während der Realteil annähernd konstant ist.

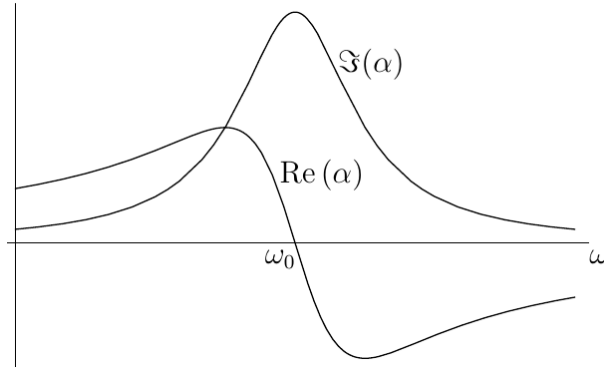


Abbildung 1: Verhalten von $\Re(\alpha)$ und $\Im(\alpha)$ in der Nähe einer Resonanzfrequenz

Die obige Betrachtung kann sehr leicht auf Materialien verallgemeinert werden, deren Moleküle/Atome jeweils Z schwingungsfähige Elektronen mit Eigenfrequenzen ω_j und Dämpfungsfaktoren $1/\tau_j$ tragen. Dann ist

$$\alpha(\omega) = \frac{q^2}{m} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\omega/\tau_j}.$$

f_j ist so etwas wie die Zahl der Elektronen mit Frequenz ω_j und wird als Oszillatorstärke bezeichnet. Es gilt $\sum_j f_j = Z$. Man muß nun zwei Fälle unterscheiden: Liegt die Frequenz des äußeren Feldes außerhalb der Intervalle $[\omega_j - 1/\tau_j, \omega_j + 1/\tau_j]$, so ist α annähernd konstant (und damit natürlich auch ε). Kommt jedoch ω in die Nähe einer der Eigenfrequenzen ω_i der Elektronen, so sind α und ε stark frequenzabhängig. Insbesondere kann dann der Imaginärteil von α bzw. ε nicht mehr vernachlässigt werden.

Übung 3 - Maxwell-Gleichungen: Dualität und magnetische Monopole (2+2+1=5 Punkte)

- (a) Mit $c_0 = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ lauten die dualen Maxwell-Gleichungen wie folgt:

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{E}} = \cos(\zeta) \nabla \cdot \mathbf{E} - \sin(\zeta) / \sqrt{\epsilon_0\mu_0} \underbrace{\nabla \cdot \mathbf{B}}_{=0} = \cos(\zeta) \nabla \cdot \mathbf{E} = \cos(\zeta) \frac{\rho_e}{\epsilon} = \frac{\tilde{\rho}_e}{\epsilon_0}$$

Die duale (elektrische) Ladungsdichte lautet $\tilde{\rho}_e = \cos(\zeta)\rho_e$.

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \tilde{\mathbf{B}} &= \cos(\zeta) \underbrace{\nabla \cdot \mathbf{B}}_{=0} + \sin(\zeta) \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \nabla \cdot \mathbf{E} = \sin(\zeta) \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \nabla \cdot \mathbf{E} = \sin(\zeta) \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\tilde{\rho}_e}{\epsilon_0} \\
&= \rho_e \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \sin(\zeta) = \tilde{\rho}_m
\end{aligned}$$

Die duale (magnetische) Ladungsdichte lautet $\tilde{\rho}_m = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \sin(\zeta) \rho_e$.

$$\begin{aligned}
\nabla \times \tilde{\mathbf{E}} &= \cos(\zeta) \nabla \times \mathbf{E} - \sin(\zeta) / \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \nabla \times \mathbf{B} \\
&= \cancel{\cos(\zeta) \partial_t \mathbf{B}} - \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \sin(\zeta) \mathbf{j}_e - \cancel{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \sin(\zeta) \partial_t \mathbf{E}} \\
&= -\tilde{\mathbf{j}}_m - (\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \sin(\zeta) \partial_t \mathbf{E} + \cancel{\cos(\zeta) \partial_t \mathbf{B}})
\end{aligned}$$

Die duale (magnetische) Stromdichte lautet $\tilde{\mathbf{j}}_m = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \sin(\zeta) \mathbf{j}_e$.

$$\begin{aligned}
\nabla \times \tilde{\mathbf{B}} &= \cos(\zeta) \nabla \times \mathbf{B} + \sin(\zeta) \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \nabla \times \mathbf{E} \\
&= \cos(\zeta) \mu_0 \mathbf{j}_e + \cancel{\cos(\zeta) \mu_0 \epsilon_0 \partial_t \mathbf{E}} - \cancel{\sin(\zeta) \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \partial_t \mathbf{B}} \\
&= \mu_0 \tilde{\mathbf{j}}_e + \cancel{\cos(\zeta) \mu_0 \epsilon_0 \partial_t \mathbf{E}} - \cancel{\sin(\zeta) \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \partial_t \mathbf{B}}
\end{aligned}$$

Die duale (elektrische) Stromdichte lautet $\tilde{\mathbf{j}}_e = \cos(\zeta) \mathbf{j}_e$.

Mit den so definierten Dichten genügen die Dualen Felder den transformierten (symmetrisierten!!!) Gleichungen.

- (b) Die übliche Kontinuitätsgleichung lautet $\partial_t \rho(\mathbf{r}, t) + \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 0$. Hier müssen wir die Kontinuitätsgleichungen der Ladungsdichten (sowohl die magnetische als auch die elektrische) aus den dualen Maxwell-Gleichungen herleiten:

$$\begin{aligned}
\underbrace{\nabla \cdot (\nabla \times \tilde{\mathbf{E}})}_{=0} &= -\nabla \cdot \tilde{\mathbf{j}}_m - \nabla \cdot \partial_t \tilde{\mathbf{B}} = \tilde{\mathbf{j}}_m - \partial_t \nabla \cdot \tilde{\mathbf{B}} \\
&= -\nabla \cdot \tilde{\mathbf{j}}_m - \partial_t \tilde{\rho}_m
\end{aligned}$$

schließlich gilt $\partial_t \tilde{\rho}_m + \nabla \cdot \tilde{\mathbf{j}}_m = 0$ und somit ist die (magnetische) Ladung erhalten.

Das selbe gilt für die (elektrische) Ladung, denn

$$\begin{aligned}
\underbrace{\nabla \cdot (\nabla \times \tilde{\mathbf{B}})}_{=0} &= \mu_0 (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{j}}_e + \epsilon_0 \nabla \cdot \partial_t \tilde{\mathbf{E}}) = \mu_0 (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{j}}_e + \epsilon_0 \partial_t \nabla \cdot \tilde{\mathbf{E}}) \\
&= \mu_0 (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{j}}_e + \partial_t \tilde{\rho}_e) = 0
\end{aligned}$$

Die Lorentz-Kraftdichte lautet

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\tilde{\rho}_m}{\mu_0} \tilde{\mathbf{B}} - \epsilon_0 \tilde{\mathbf{j}}_m \times \tilde{\mathbf{E}} + \tilde{\rho}_e \tilde{\mathbf{E}} + \tilde{\mathbf{j}}_e \times \tilde{\mathbf{B}} \\
&= \frac{1}{\mu_0} \rho_e \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \sin(\zeta) (\cancel{\cos(\zeta) \mathbf{B}} + \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \sin(\zeta) \mathbf{E}) - \mathbf{j}_e \sin(\zeta) \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \times \left(\cancel{\epsilon_0 \cos(\zeta) \mathbf{E}} - \frac{\epsilon_0 \sin(\zeta)}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \mathbf{B} \right) \\
&\quad + \rho_e \cos(\zeta) \left(\cos(\zeta) \mathbf{E} - \frac{\sin(\zeta)}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \mathbf{B} \right) + \mathbf{j}_e \cos(\zeta) \times \left(\frac{\sin(\zeta)}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \mathbf{E} + \cos(\zeta) \mathbf{B} \right) \\
&= \rho_e \sin^2(\zeta) \mathbf{E} + \rho_e \cos^2(\zeta) \mathbf{E} + \mathbf{j}_e \sin^2(\zeta) \mathbf{B} + \mathbf{j}_e \cos^2(\zeta) \mathbf{B} \\
&= \rho_e \mathbf{E} + \mathbf{j}_e \times \mathbf{B} = \mathbf{f}(\mathbf{r}, t)
\end{aligned}$$

Somit erfüllt die duale Lorentz-Kraftdichte die übliche.

(c)

$$\frac{\tilde{\rho}_m(\mathbf{r}, t)}{\tilde{\rho}_e(\mathbf{r}, t)} = \frac{\rho_e(\mathbf{r}, t) \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \sin(\zeta)}{\rho_e(\mathbf{r}, t) \cos(\zeta)} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \tan(\zeta)$$

Dieser Bruch ist weder Zeit- noch Ortsabhängig. Das impliziert, dass der Anteil an magnetischen Monopole (mit Ladungsquellen $\tilde{\rho}_m$) allein durch den Transformationswinkel ζ angepasst werden kann, ohne dass man die Gesetze der Elektrodynamik ändert. Für $\zeta = 0$ verschwinden die magnetischen Monopole, während die obigen Maxwell-Gleichungen, sowie die Felder sich auf die üblichen reduzieren. Man kann aber auch die elektrischen Monopole verschwinden lassen, indem man $\zeta = \frac{\pi}{2}$ wählt, so dass das System rein magnetisch ist.