

Übungsblatt # 14 zur Vorlesung Klassische Theoretische Physik III Lösungen zu den Übungen

Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theoretische Festkörperphysik

Karim Mnasri (karim.mnasri@kit.edu)

Prof. Dr. Carsten Rockstuhl (carsten.rockstuhl@kit.edu)

Übung 1 - Ebene Wellen

Im folgendem gilt folgende Notation : $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ und $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$.

(a) Für jedes der Felder gilt

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{r}, t) &= \partial_i f_{0i}(\mathbf{k}, \omega) e^{i(k_j r_j - \omega t)} \\ &= \delta_{ij} i k_j f_{0i}(\mathbf{k}, \omega) e^{i(k_j r_j - \omega t)} \\ &\stackrel{j=i}{=} i k_i f_{0i}(\mathbf{k}, \omega) e^{i(k_j r_j - \omega t)} \\ &= i \mathbf{k} \cdot \mathbf{f}_0(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}\end{aligned}\tag{1}$$

$$\begin{aligned}[\nabla \times \mathbf{f}(\mathbf{r}, t)]_i &= \epsilon_{ijk} \partial_j f_k(\mathbf{r}, t) \\ &= \epsilon_{ijk} \partial_j f_{0k}(\mathbf{k}, \omega) e^{i(k_l r_l - \omega t)} \\ &= \epsilon_{ijk} \delta_{jl} i k_l f_{0k}(\mathbf{k}, \omega) e^{i(k_l r_l - \omega t)} \\ &\stackrel{l=j}{=} \epsilon_{ijk} i k_j f_{0k}(\mathbf{k}, \omega) e^{i(k_j r_j - \omega t)} \\ &= i [\mathbf{k} \times \mathbf{f}_0(\mathbf{k}, \omega)]_i e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}\end{aligned}\tag{2}$$

Trivialerweise gilt für die zeitliche Ableitung

$$\begin{aligned}\partial_t \mathbf{f}(\mathbf{r}, t) &= \partial_t \mathbf{f}_0(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \\ &= -i \omega \mathbf{f}_0(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}\end{aligned}\tag{3}$$

Gleichungen (1), (2) und (3) in den Maxwell-Gleichungen einsetzen und dabei jeweils den Faktor $i e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$ kürzen liefert

$$\begin{aligned}\mathbf{k} \cdot \mathbf{D}(\mathbf{k}, \omega) &= 0, & \mathbf{k} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{k}, \omega) &= 0, \\ \mathbf{k} \times \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) + \omega \mathbf{B}(\mathbf{k}, \omega) &= 0, & \mathbf{k} \times \mathbf{H}(\mathbf{k}, \omega) - \omega \mathbf{D}(\mathbf{k}, \omega) &= 0.\end{aligned}$$

(b) Aus den ersten und den vierten Maxwell-Gleichungen folgen $\nabla \cdot \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = 0$ und $\mathbf{k} \times \mathbf{H}(\mathbf{k}, \omega) - \omega \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = 0$. Rotation von der zweiten Maxwell-Gleichung liefert

$$\mathbf{k} \times \mathbf{k} \times \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) + \omega \mathbf{k} \times \mathbf{B}(\mathbf{k}, \omega) = \underbrace{\mathbf{k} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega))}_{=0} - k^2 \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) + \omega \mu_0 \mathbf{k} \times \mathbf{H}(\mathbf{k}, \omega)$$

Nun müssen wir nur noch $\mathbf{k} \times \mathbf{H}$ aus der Nebenrechnung einsetzen und wir erhalten

$$\begin{aligned}(-k^2 + \omega^2 \mu_0 \epsilon_0) \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) &= 0 \\ \Rightarrow \omega(\mathbf{k}) &= \frac{k}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}\end{aligned}\tag{4}$$

Die Einheit des Verhältnisses $[Z] = \frac{[|\mathbf{E}|]}{[|\mathbf{H}|]} = \frac{\frac{V}{m}}{\frac{A}{m}} = \frac{V}{A} = \Omega$. Dies ist die Einheit der Impedanz. Die Größe Z ist von enormer Bedeutung wird auch als Wellen-Impedanz einer elektromagnetischen Welle bezeichnet. Dies gibt eine Eigenschaft eines Mediums an, in dem sich die Welle ausbreitet. Der Wert von Z folgt unmittelbar aus den Maxwell-Gleichung und aus der Dispersionsrelation:

$$|\mathbf{k} \times \mathbf{E}| = |-\omega \mathbf{B}| \Leftrightarrow \frac{|\mathbf{k} \times \mathbf{E}|}{|\mathbf{H}|} = \omega \mu_0 \quad (5)$$

Aus $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$ folgt $|\mathbf{k} \times \mathbf{E}| = k|\mathbf{E}|$. Dies setzen wir in Gleichung (5) ein und mit Hilfe der Dispersionsrelation bekommen wir

$$\begin{aligned} Z &= \frac{|\mathbf{E}|}{|\mathbf{H}|} \\ &= \frac{\omega \mu_0}{k} \\ &= \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx 376,73 \Omega. \end{aligned} \quad (6)$$

Übung 2 - Ideal reflektierender Spiegel

- (a) Trifft eine elektromagnetische Welle auf einen gewöhnlichen Spiegel, so wird sie zum Teil reflektiert und zum Teil gebrochen. Bei einem idealen Spiegel hingegen wird die einfallende Welle vollständig reflektiert. Betrachten wir nun im folgenden solch einen idealen Spiegel in der xy -Ebene. Wir wollen uns hier auf die Behandlung ebener Wellen beschränken und wählen daher den Ansatz

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad \mathbf{E}''(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0'' e^{i(\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r} - \omega t)}. \quad (7)$$

Hier sind $\mathbf{E}_0$ und $\mathbf{k}$ Amplitudenfaktor bzw. Wellenzahlvektor der einfallenden Welle, während die gestrichelten Größen die reflektierte Welle beschreiben. Bekanntlich geht die Tangentialkomponente des elektrischen Feldes an Grenzflächen stetig über. In unserem Fall ist daher

$$\mathbf{E}_t^{ges} = (\mathbf{E}_t + \mathbf{E}_t'')|_{z=0} = \left(\mathbf{E}_{0t} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + \mathbf{E}_{0t}'' e^{i(\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \right) \Big|_{z=0} = 0. \quad (8)$$

Diese Bedingung muss für alle Vektoren $\mathbf{r}$ in der Grenzfläche und für alle Zeiten t erfüllt sein – insbesondere natürlich auch für $t=0$. Aus Gleichung (8) folgt deshalb sofort

$$\mathbf{E}_{0t} + \mathbf{E}_{0t}'' e^{i(\mathbf{k}'' - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}} = 0 \quad \forall \mathbf{r} = (x, y, 0). \quad (9)$$

Das kann nur dann für alle Vektoren der Grenzfläche erfüllt sein, wenn $\mathbf{k}'' - \mathbf{k}$ ein Vielfaches des Einheitsvektors in z -Richtung ist, d.h.

$$\mathbf{k}'' - \mathbf{k} = a \mathbf{e}_z. \quad (10)$$

Die x - und y -Komponenten von $\mathbf{k}$ bzw. $\mathbf{k}''$ müssen daher gleich sein – was intuitiv ja auch zu erwarten war. Um die Konstante a zu bestimmen, formen wir (10) ein wenig um. Zunächst multiplizieren wir (10) mit $\mathbf{k}$ bzw. $\mathbf{k}''$ und verwenden, dass $k^2 = (\mathbf{k}'')^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2$. Dann ist

$$\left. \begin{aligned} a \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_z &= \mathbf{k}'' \cdot \mathbf{k} - k^2 \\ a \mathbf{k}'' \cdot \mathbf{e}_z &= (\mathbf{k}'')^2 - \mathbf{k}'' \cdot \mathbf{k} \end{aligned} \right\} \implies (\mathbf{k}'')^2 - k^2 = 0 = a(\mathbf{k} + \mathbf{k}'') \cdot \mathbf{e}_z,$$

also $\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{e}_z = -\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_z$ bzw. $k_z'' = -k_z$. Damit läßt sich $\mathbf{k}''$ ausdrücken als

$$\mathbf{k}'' = \mathbf{k} - 2k_z \mathbf{e}_z. \quad (11)$$

Jetzt muss noch $\mathbf{E}_0''$ in Abhängigkeit von $\mathbf{E}_0$ bestimmt werden. Aber auch das ist sehr einfach. Unter Verwendung von (10) läßt sich (9) schreiben als

$$\mathbf{E}_{0t} + \mathbf{E}_{0t}'' = 0.$$

Zur weiteren Umformung verwenden wir die allgemeine Zerlegung eines Vektors in Tangential- und Normalenkomponente

$$\mathbf{v}_t = \mathbf{v} - \mathbf{n}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}).$$

In unserem Fall ist $\mathbf{n} = \mathbf{e}_z$, so dass

$$\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_0'' = \mathbf{e}_z(E_{0z} + E_{0z}'') \quad (12)$$

ist. Multiplizieren wir jetzt von beiden Seiten skalar mit $\mathbf{k}$ und verwenden die für eine ebene Welle gültige Beziehung $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 + \mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0'' &\stackrel{(11)}{=} (\mathbf{k}'' + 2k_z \mathbf{e}_z) \cdot \mathbf{E}_0'' = 2k_z E_{0z}'' = k_z(E_{0z} + E_{0z}'') \\ \implies E_{0z} &= E_{0z}''. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}_0'' &= \mathbf{E}_{0t}'' + E_{0z}'' \mathbf{e}_z \\ \mathbf{E}_{0t}'' &= -\mathbf{E}_{0t} = -\mathbf{E}_0 + E_{0z} \mathbf{e}_z \end{aligned} \right\} \implies \mathbf{E}_0'' = -\mathbf{E}_0 + 2E_{0z} \mathbf{e}_z. \quad (13)$$

Nach diesen allgemeinen Betrachtungen wenden wir uns im folgenden zwei Spezialfällen zu: dem senkrechten Einfall einer linear bzw. zirkular polarisierten ebenen Welle.

- (b) Bei einer ebenen Welle stehen bekanntlich Wellenzahlvektor und $\mathbf{E}$ -Feld senkrecht aufeinander. Die allgemeinste Form einer ebenen Welle mit Frequenz ω ist daher

$$\mathbf{E} = (\varepsilon_1 E_{01} + \varepsilon_2 E_{02}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)},$$

wobei $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ Einheitsvektoren senkrecht zu $\mathbf{k}$ sind. Im Spezialfall einer ebenen Welle ist die Richtung von $\mathbf{E}$ für alle Zeiten konstant.

In unserem Fall soll solch eine linear polarisierte Welle senkrecht auf den Spiegel treffen, das bedeutet,

$$\mathbf{k} = k \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{k}'' = -\mathbf{k}. \quad (14)$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wählen wir $\mathbf{E}_0 = E_0 \mathbf{e}_y$. Dann folgt aus (13)

$$\mathbf{E} = E_0 \mathbf{e}_y e^{i(kz - \omega t)}, \quad \mathbf{E}'' = -E_0 \mathbf{e}_y e^{i(-kz - \omega t)}, \quad (15)$$

und das gesamte $\mathbf{E}$ -Feld (das sich aus einfallender plus reflektierter Welle zusammensetzt) ist

$$\mathbf{E}_{ges} = \mathbf{E} + \mathbf{E}'' = E_0 e^{-i\omega t} (e^{ikz} - e^{-ikz}) = 2i E_0 e^{-i\omega t} \sin kz. \quad (16)$$

Das zugehörige $\mathbf{B}$ -Feld wird mit Hilfe der Maxwellschen Gleichung

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\mathbf{k} \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B} = i\omega \mathbf{B} \quad (17)$$

berechnet. Für das einfallende Feld ergibt sich so

$$\omega \mathbf{B} = \mathbf{k} \times \mathbf{E} = k \mathbf{e}_z \times E_0 \mathbf{e}_y e^{i(kz - \omega t)} = -E_0 k \mathbf{e}_x e^{i(kz - \omega t)}, \quad (18)$$

bzw. unter Verwendung von $k = \frac{\omega}{c}$

$$\mathbf{B} = -\frac{E_0}{c} e^{i(kz - \omega t)} \mathbf{e}_x. \quad (19)$$

Analog ergibt sich für das $\mathbf{B}$ -Feld der reflektierten Welle

$$\mathbf{B}'' = -\frac{1}{c} \mathbf{e}_z \times \mathbf{E}'' = -\frac{E_0}{c} e^{i(-kz - \omega t)} \mathbf{e}_x$$

und das Gesamtfeld ist

$$\mathbf{B}_{ges} = \mathbf{B} + \mathbf{B}'' = -\frac{E_0}{c} e^{-i\omega t} (e^{ikz} + e^{-ikz}) \mathbf{e}_x = -\frac{2E_0}{c} e^{-i\omega t} \cos(kz) \mathbf{e}_x. \quad (20)$$

Die Energiedichte des elektromagnetischen Feldes berechnet sich allgemein als

$$w = \frac{1}{2} \left[\varepsilon_0 [\text{Re}(\mathbf{E}_{ges})]^2 + \frac{1}{\mu_0} [\text{Re}(\mathbf{B}_{ges})]^2 \right]. \quad (21)$$

Mit (16,20) und unter Verwendung der Beziehung $\mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$ ist daher

$$\begin{aligned} w &= 2 \left[\varepsilon_0 E_0^2 \sin^2 \omega t \sin^2 kz + \frac{1}{\mu_0 c^2} E_0^2 \cos^2 \omega t \cos^2 kz \right] \\ &= 2 \varepsilon_0 E_0^2 [\sin^2 \omega t \sin^2 kz + \cos^2 \omega t \cos^2 kz] \\ &= \varepsilon_0 E_0^2 [1 + \cos(2\omega t) \cos(2kz)]. \end{aligned} \quad (22)$$

Hierbei haben wir im letzten Schritt verwendet, dass

$$\begin{aligned} 1 + \cos(2\omega t) \cos(2kz) &= 1 + (\cos^2 \omega t - \sin^2 \omega t)(\cos^2 kz - \sin^2 kz) \\ &= 2(\sin^2 \omega t \sin^2 kz + \cos^2 \omega t \cos^2 kz). \end{aligned}$$

Die Energiedichte w oszilliert offenbar mit der doppelten Frequenz um den zeitlichen Mittelwert

$$\bar{w} = \varepsilon_0 E_0^2.$$

Kommen wir nun noch zum Poyntingvektor $\mathbf{S}_{ges}$. Dieser ist durch

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{ges} &= \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E}_{ges} \times \mathbf{B}_{ges} = -\frac{4iE_0^2}{\mu_0 c} \sin kz \cos kz e^{-2i\omega t} \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_x \\ &= 2i \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_0^2 \sin(2kz) e^{-2i\omega t} \mathbf{e}_z. \end{aligned}$$

gegeben. Auch der Poyntingvektor weist also eine harmonische Zeitabhängigkeit auf, wobei die Frequenz 2ω beträgt. Anders aber als bei der Energiedichte *verschwindet* der zeitliche Mittelwert des Poyntingvektors.

Die Beobachtungen bezüglich des Verhaltens von Energiedichte und Poyntingvektor lassen nur einen Schluß zu: es handelt sich hier um eine *stehende Welle*.

- (c) Zum Schluß soll noch der senkrechte Einfall einer *zirkular* polarisierten Welle betrachtet werden. Für die einfallende Welle wählen wir den Ansatz

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_0 \mathbf{e}_x \cos(kz - \omega t) + E_0 \mathbf{e}_y \sin(kz - \omega t).$$

Das $\mathbf{B}$ -Feld berechnen wir aus $\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mathbf{B}$ und finden

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \frac{E_0}{c} \mathbf{e}_z \times [\mathbf{e}_x \cos(kz - \omega t) + \mathbf{e}_y \sin(kz - \omega t)] \\ &= \frac{E_0}{c} [\mathbf{e}_y \cos(kz - \omega t) - \mathbf{e}_x \sin(kz - \omega t)]. \end{aligned}$$

Analog findet man für die reflektierte Welle

$$\mathbf{E}''(\mathbf{r}, t) = -E_0 [\mathbf{e}_x \cos(kz + \omega t) - \mathbf{e}_y \sin(kz + \omega t)]$$

und

$$\begin{aligned} \mathbf{B}'' &= \frac{\mathbf{k}''}{c} \times \mathbf{E}'' = \frac{E_0}{c} \mathbf{e}_z \times [\mathbf{e}_x \cos(kz + \omega t) - \mathbf{e}_y \sin(kz + \omega t)] \\ &= \frac{E_0}{c} [\mathbf{e}_y \cos(kz + \omega t) + \mathbf{e}_x \sin(kz + \omega t)]. \end{aligned}$$

Diesmal interessieren wir uns nicht für Energiedichte und Poyntingvektor, sondern wir wollen hier die Impuls- und Drehimpulsbilanz untersuchen. Die Impulsdichte $\boldsymbol{\pi} = \varepsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ der einfallenden Welle ist

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\pi} &= \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{c} [\mathbf{e}_x \cos(kz - \omega t) + \mathbf{e}_y \sin(kz - \omega t)] \\ &\quad \times [\mathbf{e}_y \cos(kz - \omega t) - \mathbf{e}_x \sin(kz - \omega t)] \\ &= \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{c} \mathbf{e}_z = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{\omega} \mathbf{k}, \end{aligned}$$

wobei wir $\mathbf{k} = \frac{\omega}{c} \mathbf{e}_z$ eingesetzt haben. Eine analoge Rechnung für die Impulsdichte der reflektierten Welle ergibt

$$\boldsymbol{\pi}'' = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{\omega} \mathbf{k}'',$$

und damit ist

$$\boldsymbol{\pi}'' - \boldsymbol{\pi} = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{\omega} (\boldsymbol{k}'' - \boldsymbol{k}) = -\frac{2\varepsilon_0 E_0^2}{\omega} \boldsymbol{k}.$$

Die Impulsdichte bleibt also bei der Reflexion *nicht* erhalten. Gleiches gilt für den Drehimpuls – offensichtlich ist

$$\boldsymbol{l}'' - \boldsymbol{l} = \boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{\pi}'' - \boldsymbol{\pi}) = -\frac{2\varepsilon_0 E_0^2}{\omega} \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{k}.$$