Klassische Theoretische Physik III
Elektrodynamik WS 16/17

Institut für Kernphysik, KIT

Prof. T. Schwetz-Mangold, Dr. J. Enander, A. Pargner
`https://cr.ikp.kit.edu/pargner/teaching/theoc1617/`

---

1. Übung — Besprechung: 26.10.16

Aufgabe 1 — 4 Punkte

Wir befassen uns mit dem Kreuzprodukt von Vektoren im $\mathbb{R}^3$.

a) Zeigen Sie, dass das Kreuzprodukt bilinear ist. D.h. es gilt

$$\vec{A} \times \left(\beta \vec{B} + \gamma \vec{C}\right) = \beta \left(\vec{A} \times \vec{B}\right) + \gamma \left(\vec{A} \times \vec{C}\right) \ , \tag{1}$$

$$\left(\alpha \vec{A} + \beta \vec{B}\right) \times \vec{C} = \alpha \left(\vec{A} \times \vec{C}\right) + \beta \left(\vec{B} \times \vec{C}\right) \tag{2}$$

mit $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ in $\mathbb{R}^3$ und $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$.

0.5 Punkte

b) Zeigen Sie, dass das Kreuzprodukt antikommutiert. D.h. es gilt

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A} \ . \tag{3}$$

0.5 Punkte

c) Zeigen Sie mittels eines Gegenbeispiels, dass das Kreuzprodukt nicht assoziativ ist.

1 Punkt

d) Zeigen Sie die Jacobi Identität

$$\vec{A} \times \left(\vec{B} \times \vec{C}\right) + \vec{B} \times \left(\vec{C} \times \vec{A}\right) + \vec{C} \times \left(\vec{A} \times \vec{B}\right) = 0 \ . \tag{4}$$

2 Punkte

Hinweis 1: Auf Grund dieser Eigenschaften bildet das Kreuzprodukt zusammen mit dem $\mathbb{R}^3$ eine so genannte Lie-Algebra. In nahezu allen Gebieten der Physik spielen Lie-Gruppen und Lie-Algebren eine wichtige Rolle. Insbesondere, um die einer Theorie zu Grunde liegenden Symmetrien zu beschreiben. Betrachten Sie hierzu zum Beispiel *Schwichtenberg, Physics from Symmetry.*

Hinweis 2: Beachten Sie, dass das Kreuzprodukt zwischen zwei Vektoren $\vec{A}, \vec{B} \in \mathbb{R}^3$ in kartesischen Koordinaten als

$$\left(\vec{A} \times \vec{B}\right)_i = \sum_{k=1}^{3} \sum_{l=1}^{3} \epsilon_{ikl} A_k B_l \tag{5}$$

geschrieben werden kann. Wobei $i = 1, 2, 3$ die Komponente des Vektors $\vec{A} \times \vec{B}$ bezeichnet. Es ist ϵ_{ikl} das Levi-Civita-Symbol dritter Stufe. Es ist, per Definition, $\epsilon_{123} = 1$ und 1 bei geraden Permutationen der Indizes, -1 bei ungeraden Permutationen und 0 sonst. Sie können ohne Beweis verwenden, dass folgende Relation gilt

$$\sum_{l=1}^{3} \epsilon_{ikl} \epsilon_{lmn} = \sum_{l=1}^{3} \epsilon_{ikl} \epsilon_{mnl} = \delta_{im} \delta_{kn} - \delta_{in} \delta_{km} \ . \tag{6}$$

Hier ist δ_{ij} das Ihnen bekannte Kronecker-Delta mit $\delta_{ij} = 0$ für $i \neq j$ und 1 sonst.

Aufgabe 2 **3 Punkte**

Zeigen Sie für das Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^3$

a) die Graßmann'sche Identität

$$\vec{A} \times \left(\vec{B} \times \vec{C}\right) = \vec{B}\left(\vec{A} \cdot \vec{C}\right) - \vec{C}\left(\vec{A} \cdot \vec{B}\right) \tag{7}$$

2 Punkte

b) die Lagrange'sche Identität

$$\left(\vec{A} \times \vec{B}\right) \cdot \left(\vec{C} \times \vec{D}\right) = \left(\vec{A} \cdot \vec{C}\right)\left(\vec{B} \cdot \vec{D}\right) - \left(\vec{A} \cdot \vec{D}\right)\left(\vec{B} \cdot \vec{C}\right) \ , \tag{8}$$

wobei $\vec{A} \cdot \vec{B}$ für das Skalarprodukt der Vektoren $\vec{A}, \vec{B} \in \mathbb{R}^3$ steht.

1 Punkt

Aufgabe 3 **4 Punkte**

Der Vektor Operator $\vec{\nabla}$ ist in kartesischen Koordinaten mit den Basisvektoren $\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$ durch

$$\vec{\nabla} = \hat{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \ , \tag{9}$$

gegeben. Damit definieren wir die Differentialoperationen

- Gradient $\vec{\nabla}\Phi = \mathrm{grad}\Phi$,
- Divergenz $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \mathrm{div}\vec{V}$,
- Rotation $\vec{\nabla} \times \vec{V} = \mathrm{rot}\vec{V}$.

Hierbei ist $\Phi = \Phi(x, y, z)$ ein differenzierbares Skalarfeld und $\vec{V} = \vec{V}(x, y, z)$ ein differenzierbares Vektorfeld.

Zeigen Sie folgende Relationen

a)

$$\mathrm{div}\left(\Phi\vec{V}\right) = \Phi\mathrm{div}\vec{V} + \vec{V} \cdot \mathrm{grad}\Phi \ , \tag{10}$$

0.5 Punkte

b)

$$\mathrm{div}\left(\vec{V} \times \vec{W}\right) = \vec{W} \cdot \mathrm{rot}\vec{V} - \vec{V} \cdot \mathrm{rot}\vec{W} \ , \tag{11}$$

0.5 Punkte

c)

$$\mathrm{rot}\left(\Phi\vec{V}\right) = \Phi\left(\mathrm{rot}\vec{V}\right) - \vec{V} \times \mathrm{grad}\Phi \ , \tag{12}$$

1 Punkt

d)

$$\mathrm{rot}\left(\vec{V} \times \vec{W}\right) = \left(\vec{W} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{V} - \vec{W}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}\right) + \vec{V}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{W}\right) - \left(\vec{V} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{W} \ , \tag{13}$$

1 Punkt

e)

$$\mathrm{rot}\ \mathrm{grad}\Phi = 0 \ . \tag{14}$$

1 Punkt

Aufgabe 4 **9 Punkte**

Wir berechnen den Gradient eines Skalarfeldes Φ in den Kugelkoordinaten r, φ, ϑ. Beachten Sie, dass die Koordinaten x, y, z in Kugelkoordinaten durch

$$x = r\cos\varphi\sin\vartheta, \tag{15}$$
$$y = r\sin\varphi\sin\vartheta, \tag{16}$$
$$z = r\cos\vartheta\ , \tag{17}$$

gegeben sind, wobei $r \geq 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ und $0 \leq \vartheta < \pi$.

a) Berchnen Sie die Einheitsvektoren $\hat{e}_r, \hat{e}_\varphi, \hat{e}_\vartheta$ in Abhänigkeit der kartesischen Einheisvektoren $\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$. Berechnen Sie hierzu zunächst

$$\vec{v}_t = \frac{\partial x}{\partial t}\hat{e}_x + \frac{\partial y}{\partial t}\hat{e}_y + \frac{\partial z}{\partial t}\hat{e}_z\ , \tag{18}$$

mit $t = r, \varphi, \vartheta$ und normieren Sie dann $\vec{v}_t$, um die Einheitssvektoren $\hat{e}_t$ zu erhalten

$$\hat{e}_t = \frac{\vec{v}_t}{|\vec{v}_t|}\ . \tag{19}$$

1 Punkt

b) Zeigen Sie mit Ihrem Ergebnis aus a), dass $\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$ wie folgt geschrieben werden können

$$\hat{e}_x = \hat{e}_r\cos\varphi\sin\vartheta + \hat{e}_\vartheta\cos\varphi\cos\vartheta - \hat{e}_\varphi\sin\varphi\ , \tag{20}$$
$$\hat{e}_y = \hat{e}_r\sin\varphi\sin\vartheta + \hat{e}_\vartheta\sin\varphi\cos\vartheta + \hat{e}_\varphi\cos\varphi\ , \tag{21}$$
$$\hat{e}_z = \hat{e}_r\cos\vartheta - \hat{e}_\vartheta\sin\vartheta\ . \tag{22}$$

3 Punkte

In den Koordinaten x, y, z ist

$$\mathrm{grad}\Phi = \hat{e}_x\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \hat{e}_y\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \hat{e}_z\frac{\partial\Phi}{\partial z}\ . \tag{23}$$

c) Zeigen Sie, dass $\partial\Phi/\partial x$, $\partial\Phi/\partial y$ und $\partial\Phi/\partial z$ in Abhängigkeit von $\partial\Phi/\partial r$, $\partial\Phi/\partial\varphi$, $\partial\Phi/\partial\vartheta$ geschrieben werden können als

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{\partial\Phi}{\partial r}\cos\varphi\sin\vartheta + \frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}\frac{\cos\varphi\cos\vartheta}{r} - \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\frac{\sin\varphi}{r\sin\vartheta}\ , \tag{24}$$
$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = \frac{\partial\Phi}{\partial r}\sin\varphi\sin\vartheta + \frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}\frac{\sin\varphi\cos\vartheta}{r} + \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\frac{\cos\varphi}{r\sin\vartheta}\ , \tag{25}$$
$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = \frac{\partial\Phi}{\partial r}\cos\vartheta - \frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}\frac{\sin\vartheta}{r}\ . \tag{26}$$

Berechnen Sie hierzu zunächst

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} \tag{27}$$

für $t = r, \varphi, \vartheta$ und lösen Sie die resultierenden Gleichungen nach $\partial\Phi/\partial x$, $\partial\Phi/\partial y$ und $\partial\Phi/\partial z$ auf.

3 Punkte

d) Benutzen Sie Ihr Ergebnis aus Aufgabenteil b) und c) in Gleichung (23), um zu zeigen, dass in Kugelkoordinaten gilt

$$\mathrm{grad}\Phi = \hat{e}_r\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \hat{e}_\vartheta\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta} + \hat{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\ . \tag{28}$$

2 Punkte

Bitte schreiben Sie auf die erste Seite des Übungsblattes Ihren Namen, Matrikelnummer und die Nummer ihres Tutoriums.

Hinweise zum Übungsbetrieb

Zum Bestehen der Vorleistung müssen mindestens 50% der Übungsaufgaben korrekt gelöst werden. Werfen Sie die bearbeiteten Übungsblätter bitte bis spätestens Dienstags 11.00 Uhr in den dafür vorgesehenen Briefkasten im Erdgeschoss des Physikhochauses (Geb. 30.23). Jeder Student muss ein eigenes, selbst bearbeitetes Übungsblatt abgeben. Bitte schreiben Sie auf die Übungsblätter ihren Namen, Matrikelnummer und die Nummer ihres Tutoriums. Die Blätter erhalten Sie Mittwochs in den Tutoriem korrigiert zurück. In den Tutorien sollten Sie im Stande sein, die von Ihnen bearbeiteten Aufgaben an der Tafel zu präsentieren. Darüber hinaus wird Ihre regelmäßige Anwesenheit in den Tutorien vorrausgesetzt.

Anmeldung zu den Tutorien

Bitte melden Sie sich unter `http://www.physik.kit.edu/Tutorium/WS1617/TheorieC/` bis Fr 21.01.16 11.30 Uhr für die Tutorien an. Die Anmeldung wird Mi 19.10.16 11.30 Uhr freigeschaltet. Die Einteilung der Tutorien wird ab 24.10.16 auf der Homepage bekannt gegeben und im Erdgeschoss des Physikhochhauses ausgehängt.

Anmeldung zur Vorleistung

Sobald Sie sich online für die Vorleistung anmelden können, wird dies in der Vorlesung und auf den Übungsblättern bekannt gegeben.

Hinweise zu den Modulklausuren

Die Termine der Klausuren lauten:

- **1. Klausur** Freitag 24.02.17
- **2. Klausur** Mittwoch 05.04.17

Die Uhrzeiten werden rechtzeitig bekannt gegeben.

Kontakt

Bei wichtigen Fragen wenden Sie sich bitte an: andreas.pargner@kit.edu