Klassische Theoretische Physik III
Elektrodynamik WS 16/17

Institut für Kernphysik, KIT

Prof. T. Schwetz-Mangold, Dr. J. Enander, A. Pargner
`https://cr.ikp.kit.edu/pargner/teaching/theoc1617/`

2. Übung — Besprechung: 02.11.16

Beachten Sie: Auf Grund des Feiertages ist die Abgabe des Blattes bereits am Montag, 31.10.16 bis 11.00 Uhr.

Aufgabe 1 — 8 Punkte

Der Fundamentalsatz der Analysis lässt sich in folgender Form schreiben

$$\int_a^b \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right) \mathrm{d}x = f(b) - f(a)\ . \tag{1}$$

Dieser Satz besagt im Wesentlichen, dass das Integral einer Ableitung bestimmt ist durch die Funktionswerte an den Endpunkten des Integrationsintervalls.

Auf dem letzten Übungsblatt haben wir die Differentialoperationen grad, div und rot kennen gelernt. Für sie gelten entsprechende Sätze

$$\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} (\mathrm{grad}\Phi)\, \mathrm{d}\vec{l} = \Phi(\vec{b}) - \Phi(\vec{a})\ , \tag{2}$$

$$\int_{\mathcal{V}} \left(\mathrm{div}\vec{V}\right) \mathrm{d}\mathcal{V} = \oint_f \vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{f}\ , \tag{3}$$

$$\int_f \left(\mathrm{rot}\vec{V}\right) \cdot \mathrm{d}\vec{f} = \oint_C \vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{l}\ . \tag{4}$$

Hierbei ist $\Phi(\vec{x})$ ein differenzierbares Skalarfeld und $\vec{V}(\vec{x})$ ein differenzierbares Vektorfeld; in Gl. (3) ist $f = f(\mathcal{V})$ der Rand des Volumens $\mathcal{V}$ und in Gl. (4) ist $C = C(f)$ der Rand der Fläche f. Auch diese Sätze besagen im Prinzip, dass das Integral einer Ableitung durch die Funktionswerte an den Grenzen bestimmt ist. Nur sind die Grenzen hier gegeben durch die Endpunkte $\vec{b}$ und $\vec{a}$, durch die Fläche A und durch die geschlossene Kurve C. Die letzten beiden Sätze kennen wir als Satz von Gauß und Satz von Stokes.

a) Überprüfen Sie Gl. (2) für $\Phi(\vec{x}) = x^2 + 4xy + 2yz^3$ und die Endpunkte $\vec{b} = (1,1,1)$ und $\vec{a} = (0,0,0)$. Benutzen Sie

   i) den Weg $(0,0,0) \to (1,0,0) \to (1,1,0) \to (1,1,1)$,

   ii) den parabolischen Weg $z = x^2$, $y = x$,

   um zu zeigen, dass der Satz unabhängig von der Wahl des Weges ist.

   2 Punkte

b) Überprüfen Sie Gl. (3) für das Vektorfeld $\vec{V} = ax\hat{e}_x + by\hat{e}_y + cz\hat{e}_z$ mit dem Volumen gegeben durch $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$, wobei $a, b, c \in \mathbb{R}$ konstant sind.

   Hinweis: Führen Sie die Integration in Kugelkoordinate aus. Benutzen Sie, dass dort $\mathrm{d}\mathcal{V} = r^2 \mathrm{d}r \mathrm{d}\cos\vartheta \mathrm{d}\varphi$ und $\mathrm{d}\vec{f} = r^2 \mathrm{d}\cos\vartheta \mathrm{d}\varphi \hat{e}_r$. Nutzen Sie auch Ihr Ergebnis aus Übung 1, Aufgabe 4 a).

   3 Punkte

c) Leiten Sie mit Hilfe des Satz von Gauß den 1. Green'schen Integralsatz her. Dieser lautet

$$\int_{\mathcal{V}} (\triangle\Phi_1)\,\Phi_2 \mathrm{d}\mathcal{V} = \oint_A \Phi_2 \mathrm{grad}\Phi_1 \cdot \mathrm{d}\vec{f} - \int_{\mathcal{V}} (\mathrm{grad}\Phi_1)\,(\mathrm{grad}\Phi_2)\,\mathrm{d}\mathcal{V}\ . \tag{5}$$

Dabei ist $\triangle\Phi = \mathrm{div}\ \mathrm{grad}\Phi$ und $\Phi_{1,2}$ sind differenzierbare Skalarfelder; $\triangle$ bezeichnen wir als Laplace Operator.

Hinweis: Benutzen Sie Ihr Ergebnis aus Übung 1, Aufgabe 3 a).

2 Punkte

d) Leiten Sie den 2. Green'schen Integralsatz her. Dieser lautet

$$\int_{\mathcal{V}} [(\triangle\Phi_1)\,\Phi_2 - \Phi_1\,(\triangle\Phi_2)]\,\mathrm{d}\mathcal{V} = \oint_A (\Phi_2 \mathrm{grad}\Phi_1 - \Phi_1 \mathrm{grad}\Phi_2) \cdot \mathrm{d}\vec{f}\ . \tag{6}$$

1 Punkte

Aufgabe 2 — 4 Punkte

Wir betrachten das Vektorfeld $\vec{V}(\vec{r})$, welches in Kugelkoordinaten gegeben ist durch

$$\vec{V}(\vec{r}) = \frac{1}{r^2}\hat{e}_r\ . \tag{7}$$

a) Berechnen Sie naiv $\mathrm{div}\vec{V}(\vec{r})$.

Hinweis: In Kugelkoordinaten gilt

$$\mathrm{div}\vec{V} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 V_r\right) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta V_\vartheta\right) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial V_\varphi}{\partial\varphi}\ . \tag{8}$$

0.5 Punkte

b) Berechnen Sie nun das Oberflächenintegral $\oint \vec{V}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{f}$ über eine Kugel mit Radius R.

1 Punkt

c) Berechnen Sie nun nochmal das selbe Oberflächenintegral, indem Sie den Satz von Gauß und Ihr Ergebnis aus a) verwenden.

0.5 Punkte

Die widersprüchlichen Ergebnisse in b) und c) bedeuten nicht, dass der Satz von Gauß nicht korrekt ist. Vielmehr besagt unser Ergebnis aus b), dass

$$\oint_f \vec{V}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{f} = \int_{\mathcal{V}} \mathrm{div}\vec{V}(\vec{r})\mathrm{d}\mathcal{V} = 4\pi \tag{9}$$

und dies ist unabhängig davon, wie klein wir den Radius R der Kugel wählen. Also ist $\mathrm{div}\vec{V}(\vec{r}) = 0$ überall, bis auf $r = 0$. An dieser Stelle divergiert $\mathrm{div}\vec{V}(\vec{r})$. Daraus schließen wir wiederum, dass

$$\mathrm{div}\vec{V}(\vec{r}) = \mathrm{div}\left(\frac{1}{r^2}\hat{e}_r\right) = 4\pi\delta^{(3)}(\vec{r})\ . \tag{10}$$

sein muss. Dabei ist $\delta^{(3)}(\vec{r})$ die Ihnen bekannte Dirac Delta Distribution in drei Dimensionen.

d) Zeigen Sie die nützliche Relation

$$\triangle\frac{1}{r} = -4\pi\delta^{(3)}(\vec{r})\ . \tag{11}$$

Hinweis: Beachten Sie, dass $\vec{V}(\vec{r})$ in Gl. (7) wirbelfrei ist.

2 Punkte

Aufgabe 3 **8 Punkte**

Im Folgenden leiten wir den Helmholtz'schen Zerlegunssatz für spezielle Vektorfelder her.

a) Zeigen Sie zunächst, dass aus dem Satz von Gauß

$$\int_{\mathcal{V}} \mathrm{rot}\vec{V}\mathrm{d}\mathcal{V} = \oint_{f} \mathrm{d}\vec{f} \times \vec{V} \tag{12}$$

folgt.

Betrachten Sie hierzu zunächst $\int_{\mathcal{V}} \mathrm{div}\left(\vec{V} \times \vec{W}\right) \mathrm{d}\mathcal{V}$ für ein beliebiges Vektorfeld $\vec{W}$. Wählen Sie dieses anschließend konstant, $\vec{W} = const$.

Hinweis: Die Relation aus Übung 1, Aufgabe 3 b) kann hilfreich sein.

2 Punkte

Wir betrachten nun Vektorfelder $\vec{V}(\vec{r})$ für die gilt, $|\vec{V}(\vec{r})| \leq const/r^2$ für $r \to \infty$. Dies bedeutet mit dem Satz von Gauß, dass

$$\int_{\mathcal{V}'} \mathrm{div}\left(\frac{\vec{V}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right) \mathrm{d}^3r' \to 0 \ , \tag{13}$$

$$\int_{\mathcal{V}'} \mathrm{rot}\left(\frac{\vec{V}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right) \mathrm{d}^3r' \to 0 \ , \tag{14}$$

wenn wir als Volumen eine Kugel mit Radius $r' \to \infty$ wählen. Dabei ist d^3r nur eine andere Schreibweise für $\mathrm{d}\mathcal{V}$.

b) Überzeugen Sie sich von den Relationen (13) und (14).

1 Punkt

c) Zeigen Sie nun, dass für diese Vektorfelder folgender Zerlegunssatz gilt

$$\vec{V}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\mathrm{rot}\int \frac{\mathrm{rot}\vec{V}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\mathrm{d}^3r' - \frac{1}{4\pi}\mathrm{grad}\int \frac{\mathrm{div}\vec{V}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\mathrm{d}^3r' \ . \tag{15}$$

Betrachten Sie hierzu $\vec{V}(\vec{r}) = \int \vec{V}(\vec{r}\,')\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}\,')\mathrm{d}^3r'$. Benutzen Sie Ihr Ergebnis aus Aufgabe 4 und machen Sie Gebrauch von den Relationen aus Übung 1, Aufgabe 3.

Hinweis: Für Vektorfelder gilt

$$\triangle\vec{V} = \mathrm{grad}(\mathrm{div}\vec{V}) - \mathrm{rot}(\mathrm{rot}\vec{V}) \ . \tag{16}$$

4 Punkte

d) Was bedeute dieser Zerlegunssatz für die Darstellung (mögliche Zerlegung) der Vektorfelder $\vec{V}(\vec{r})$? Was folgt für $\vec{V}(\vec{r})$ im Falle

i) $\mathrm{rot}\vec{V}(\vec{r}) = 0$,

ii) $\mathrm{div}\vec{V}(\vec{r}) = 0$.

1 Punkt

Bitte schreiben Sie auf die erste Seite des Übungsblattes Ihren Namen, Matrikelnummer und die Nummer ihres Tutoriums.