Klassische Theoretische Physik III
Elektrodynamik WS 16/17

Institut für Kernphysik, KIT

Prof. T. Schwetz-Mangold, Dr. J. Enander, A. Pargner
https://cr.ikp.kit.edu/pargner/teaching/theoc1617/

3. Übung — Besprechung: 09.11.16

Aufgabe 1 — 7 Punkte

Wir betrachten die Dirac Delta Distribution $\delta(x)$, welche Sie in der Vorlesung und auf dem letzten Übungsblatt kennen gelernt haben. Zeigen Sie folgende Relationen:

a)

$$\delta(kx) = \frac{1}{|k|}\delta(x) \text{ mit } k \in \mathbb{R} \ . \tag{1}$$

2 Punkte

b)

$$\delta(h(x)) = \frac{1}{|h'(x_0)|}\delta(x - x_0) \ , \tag{2}$$

wobei $h(x)$ eine reelwertige, differenzierbare Funktion mit einer Nullstelle x_0 ist. Weiter sei $h'(x = x_0) \neq 0$.

Hinweis: Entwickeln Sie $h(x)$ in einer Taylor Reihe um $x = x_0$.

2 Punkte

c) Verallgemeinern Sie das Ergebnis aus b) für Funktionen $h(x)$ mit beliebig vielen, einfachen Nullstellen x_i. Weiterhin gilt für alle i, $h'(x = x_i) \neq 0$.

1 Punkt

c)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\theta(x) = \delta(x) \ , \tag{3}$$

wobei $\theta(x)$ die Heaviside Theta Funktion ist. Es gilt

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 \text{ für } x \geq 0 \\ 0 \text{ für } x < 0 \end{cases} \ . \tag{4}$$

2 Punkte

Hinweis: Die angegebenen Relationen in a) bis d) sind so zu verstehen, dass die linke und rechte Seite als Distributionen gleichwertig sind. D.h. um diese Relationen zu zeigen, multiplizieren Sie mit einer Testfunktion und integrieren Sie von $-\infty$ bis ∞.

Aufgabe 2 **6 Punkte**

Betrachten Sie eine gleichmäßig geladene, inifinitisimal dünne Kugeloberfläche mit Radius R und Ladung Q.

a) Bestimmen Sie die dazugehörige Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$. Machen Sie dazu den Ansatz

$$\rho(\vec{r}) = C \cdot \delta^{(3)}\left(|\vec{r}| - R\right) \tag{5}$$

und bestimmen Sie die Konstante C, in dem Sie $\int \rho(\vec{r})\mathrm{d}^3\vec{r} = Q$ benutzen.

Hinweis: Die Lösung lautet

$$C = \frac{Q}{4\pi R^2} \ . \tag{6}$$

2 Punkte

b) Berechnen Sie die elektrische Feldstärke $\vec{E}(\vec{r})$ aus

$$\oint_f \vec{E}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{f} = 4\pi \int_{\mathcal{V}} \rho(\vec{r})\mathrm{d}\mathcal{V} \ . \tag{7}$$

4 Punkte

Aufgabe 3 **7 Punkte**

Wir betrachten das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ und das elektrische Potential $\Phi(\vec{r})$ einer freien Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$. In der Elektrostatik bestimmen wir $\vec{E}(\vec{r})$ aus einer gegebenen Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ durch

$$\mathrm{div}\vec{E}(\vec{r}) = 4\pi\rho(\vec{r}) \ . \tag{8}$$

a) Begründen Sie, dass im elektrostatischen Fall das Feld $\vec{E}(\vec{r})$ durch ein Skalarfeld $\Phi(\vec{r})$ dargestellt werden kann.

1 Punkt

b) Drücken Sie $\vec{E}(\vec{r})$ durch das elektrische Potential $\Phi(\vec{r})$ aus und zeigen Sie dann, dass (8) zur Poisson Gleichung

$$\triangle\Phi(\vec{r}) = -4\pi\rho(\vec{r}) \tag{9}$$

führt.

1 Punkt

c) Zeigen Sie, dass eine Lösung der Poisson Gleichung gegeben ist durch

$$\Phi(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\mathrm{d}^3r' \ . \tag{10}$$

Hinweis: Verwenden Sie die Greensche Methode.

2 Punkte

d) Berechnen Sie nun aus dem Potential $\Phi(\vec{r})$ in Gleichung (10) das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$.

2 Punkte

e) Berechnen Sie mit Ihrem Ergebnis aus d) die Kraft $\vec{F}(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r})$, die eine Probeladung q im Feld einer Punktladung Q erfährt. Nehmen Sie an dass, sich die Punktladung Q im Ursprung befindet.

1 Punkt

Bitte schreiben Sie auf die erste Seite des Übungsblattes Ihren Namen, Matrikelnummer und die Nummer ihres Tutoriums.