Klassische Theoretische Physik III
Elektrodynamik WS 16/17

Institut für Kernphysik, KIT

Prof. T. Schwetz-Mangold, Dr. J. Enander, A. Pargner
`https://cr.ikp.kit.edu/pargner/teaching/theoc1617/`

5. Übung — Besprechung: 23.11.16

Dieses Übungsblatt enthält Bonusaufgaben. Diese sind als solche gekennzeichnet und sind keine Pflichtaufgaben. Mittels der Bonusaufgaben können Sie Extrapunkte verdienen und damit mehr als 100% der Punkte auf einem Übungsblatt erreichen.

Aufgabe 1 — 8 Punkte + 4 Extrapunkte

Betrachten Sie eine geerdete, leitende Hohlkugel mit Radius R. Vor der Kugel befinde sich eine Punktladung q am Ort $\vec{r}_1$. Das Koordinatensystem sei so gewählt, dass das Zentrum der Hohlkugel am Ursprung liegt und $\vec{r}_1 = r_1 \hat{e}_z$ mit $r_1 > R$ gilt.

a) Zeigen Sie, dass das Potential $\Phi(\vec{r})$ außerhalb der Kugel ($|\vec{r}| > R$) gegeben ist durch

$$\Phi(\vec{r}) = q \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} - \frac{R}{r_1} \frac{1}{|\vec{r} - (R^2/r_1^2)\vec{r}_1|} \right] . \tag{1}$$

2 Punkte

b) Zeigen Sie, dass das Potential in den Kugelkoordinaten $\vec{r} = (r, \varphi, \vartheta)$ als

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{q}{r_1} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{r^2}{r_1^2} - 2\frac{r}{r_1}\cos\vartheta}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{r^2}{R^2} + \frac{R^2}{r_1^2} - 2\frac{r}{r_1}\cos\vartheta}} \right) \tag{2}$$

geschrieben werden kann.

Hinweis: Um das Potential in Kugelkoordinaten auszudrücken, ist Aufgabe 4 auf dem ersten Übungsblatt hilfreich.

2 Punkt

c) Berechnen Sie mit Ihrem Ergebnis aus b) das elektrische Feld an der Kugeloberfläche.

Hinweis: Das Ergebnis lautet

$$\vec{E}(\vec{r} = \vec{R}) = -\frac{q}{R} \frac{r_1^2 - R^2}{(r_1^2 + R^2 - 2Rr_1\cos\vartheta)^{3/2}} \hat{e}_r , \tag{3}$$

wobei $\vec{R} = R\hat{e}_r$ ist.

2 Punkte

d) Berechnen Sie die induzierte Oberflächenladung und damit die Influenzladung Q_{infl} auf der Kugeloberfläche.

2 Punkte

e) *Bonusaufgabe*: Berechnen Sie die auf die Punktladung q_1 wirkende Kraft. Ist diese Kraft repulsiv oder attraktiv?

4 Extrapunkte

Aufgabe 2 **4 Punkte**

Ein System zweier von einander isolierten Leitern mit entgegengesetzten Ladungen $Q_+ = Q$ und $Q_- = -Q$ nennt man Kondensator. Die Potentialdifferenz

$$\Phi_{Q_+}(\vec{l}_+) - \Phi_{Q_-}(\vec{l}_-) = -\int_{\vec{l}_-}^{\vec{l}_+} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = V \tag{4}$$

bestimmt die Spannung V. Hierbei bezeichnen wir mit $\vec{l}_{+,-}$ den Ort an dem sich der jeweilige Leiter befindet. Weiter definiert man die Kapazität C über den Quotient aus positiver Ladung und Spannung,

$$C = \frac{Q}{V} \; . \tag{5}$$

Die Kapazität hängt ausschließlich von der Geometrie des Systems ab.

a) Welche Einheit hat die Kapazität im Gauß-CGS Einheitensystem?

0.5 Punkte

b) Betrachten Sie zwei große leitende Platten mit der Fläche A. Diese seien durch einen kleinen Abstand d von einander getrennt und tragen die Ladungen Q und $-Q$. Solch eine Anordnung bezeichnet man als Plattenkondensator. Begründen Sie, dass die Spannung durch

$$V = Ed \tag{6}$$

gegeben ist. Dabei ist E das elektrische Feld zwischen den Platten.

Hinweis: Wählen Sie das Koordinatensystem so, dass die positiv geladene Platte bei $z = 0$ und die negativ geladene Platte bei $z = d$ liegt. Benutzen Sie Ihre Erkenntnisse vom 4. Übungsblatt.

1 Punkt

c) Zeigen Sie mit Hilfe des Satz von Gauß, dass das elektrische Feld zwischen den Platten gegeben ist durch

$$E = 4\pi \frac{Q}{A} \; . \tag{7}$$

2 Punkte

d) Bestimmen Sie die Kapazität C des Plattenkondensators.

0.5 Punkte

Aufgabe 3 **6 Punkte**

Betrachten Sie folgende Ladungskonfiguration: Eine Ladung $Q_1 = q$ befinde sich am Punkt $x = l/2$, $y = 0$. Eine weitere Ladung $Q_2 = -q$ befinde sich bei $x = -l/2$, $y = 0$. Im Folgenden berechnen wir das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ dieses Dipols für große Entfernungen, $|\vec{r}| \gg l$.

a) Zeigen Sie mittels dem Superpositionsprinzip, dass das elektrische Potential $\Phi(\vec{x})$ an einem beliebigen Punkt $\vec{x} = (x, y)$ durch

$$\Phi(\vec{x}) = q \left[\frac{1}{\sqrt{(x - l/2)^2 + y^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x + l/2)^2 + y^2}} \right] \tag{8}$$

gegeben ist.

0.5 Punkte

b) Berechnen Sie nun das elektrische Potential in großer Entfernung, $|\vec{x}| \gg l$. Das heißt, bestimmen Sie $\Phi(\vec{x})$ in führender Ordnung in l/x.

Hinweis 1: Machen Sie dazu eine Taylor-Entwicklung von $\Phi(\vec{x})$ aus Gl. (8) in $\zeta \equiv l/x$ um $\zeta = 0$. Eine Entwicklung bis zur ersten Ordnung in ζ ist ausreichend.

Hinweis 2: Das Ergebnis lautet

$$\Phi(\vec{x}) = q \frac{lx}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \ . \tag{9}$$

3 Punkte

c) Zeigen Sie, dass in Polarkoordinaten $\vec{r} = (r, \vartheta)$ das Potential aus b) geschrieben werden kann als

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{p \cos \vartheta}{r^2} \ . \tag{10}$$

Hierbei ist $ql = p = |\vec{p}|$ der Betrag des Dipolmoments.

0.5 Punkte

d) Bestimmen Sie mit Ihrem Ergebnis aus c) das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem elektrischen Feld eines Monopols, also einer isolierten Punktladung.

Hinweis: In Polarkoordinaten gilt

$$\mathrm{grad}\Phi(\vec{r}) = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \hat{e}_\vartheta \ . \tag{11}$$

1 Punkt

Hinweis: Für eine Ladungskonfiguration aus zwei Punktladungen $Q_{1,2} = \pm q$ kann immer ein kartesisches Koordinatensystem (x, y, z) so gewählt werden, dass sich das Problem auf zwei Dimensionen (x, y) reduzieren lässt. Wählt man das Koordinatensystem so wie in der Aufgabenstellung gegeben, beobachtet man, dass die Ladungskonfiguration in drei Dimensionen rotationssymmetrisch um die x-Achse ist. Diese Symmetrie gilt auch für das Potential $\Phi(\vec{x})$ (Siehe Abb. 1).

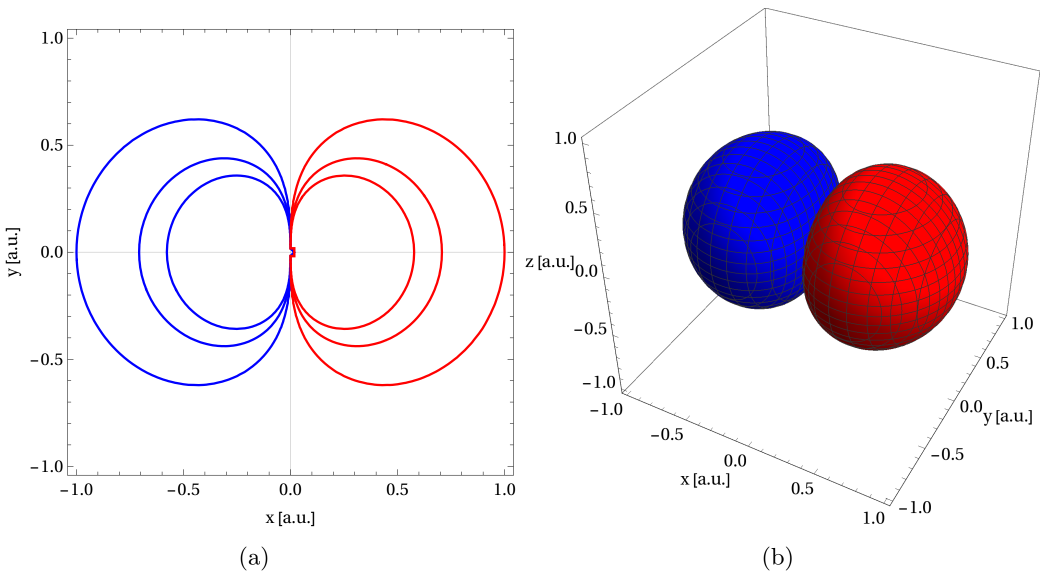


Abbildung 1: Äquipotentiallinien $\Phi(\vec{x})$ für das Dipolfeld in 2 Dimensionen (a) und 3 Dimensionen (b). Mit blau kennzeichnen wir $\Phi(\vec{x}) < 0$, mit rot $\Phi(\vec{x}) > 0$.

Aufgabe 4 **2 Punkte + 6 Extrapunkte**

Betrachten Sie folgende Ladungskonfiguration: Eine Ladung $Q_1 = q$ befinde sich am Punkt $x = -a/2$, $y = a/2$, eine weitere Ladung $Q_2 = -q$ bei $x = -a/2$, $y = -a/2$, eine Ladung $Q_3 = q$ bei $x = a/2$, $y = -a/2$ und eine Ladung $Q_4 = -q$ bei $x = a/2$, $y = a/2$. Wir berechnen nun das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ dieses Quadrupols für große Entfernungen, $|\vec{r}| \gg a$.

a) Zeigen Sie, dass das elektrische Potential $\Phi(\vec{x})$ an einem beliebigen Punkt $\vec{x} = (x, y)$ durch

$$\begin{aligned}\Phi(\vec{x}) =& q\Bigg[\frac{1}{\sqrt{(x-a/2)^2+(y+a/2)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+a/2)^2+(y+a/2)^2}} \\ &+ \frac{1}{\sqrt{(x+a/2)^2+(y-a/2)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-a/2)^2+(y-a/2)^2}}\Bigg]\end{aligned} \tag{12}$$

gegeben ist.

0.5 Punkte

b) *Bonusaufgabe*: Berechnen Sie das elektrische Potential für große Entfernungen, $|\vec{x}| \gg a$. Das heißt bestimmen Sie $\Phi(\vec{x})$ in führender Ordnung in a/x und a/y.

Hinweis 1: Machen Sie dazu eine Taylor-Entwicklung von $\Phi(\vec{x})$ aus Gl. (12) in $\zeta_1 \equiv a/x$ und $\zeta_2 \equiv a/y$ um $\zeta_1 = \zeta_2 = 0$. Eine Entwicklung bis zu zweiter Ordung in ζ_1 und ζ_2 ist ausreichend. Sie können diese Rechnung mit eine Computeralgebrasystem Ihrer Wahl durchführen. Dokumentieren Sie dies entsprechend (z.B. Ausdruck des Codes).

Hinweis 2: Das Ergebnis lautet

$$\Phi(\vec{x}) = -q\frac{3a^2xy}{(x^2+y^2)^{5/2}} \ . \tag{13}$$

6 Extrapunkte

c) Zeigen Sie, dass in Polarkoordinaten $\vec{r} = (r, \vartheta)$ das Potential aus b) geschrieben werden kann als

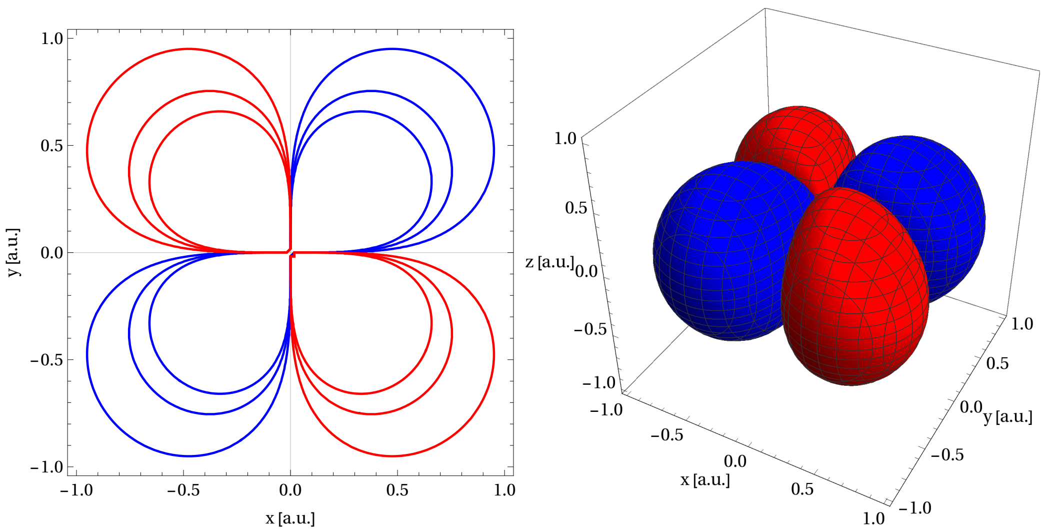
$$\Phi(\vec{r}) = -q\frac{3a^2\cos\vartheta\sin\vartheta}{r^3} \ . \tag{14}$$

0.5 Punkte

d) Berechnen Sie mit Ihrem Ergebnis aus c) das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem elektrischen Feld eines Dipols und eines Monopols.

1 Punkt

Hinweis: Analog zu der Diskussion in Aufgabe 3, lässt sich eine Quadrupol-Ladungksonfiguration in drei Dimensionen (x, y, z) immer auf zwei Dimensionen (x, y) reduzieren. Mit ähnlichen Symmetrieüberlegungen wie in Aufgabe 3, lässt sich aus dem Potential in zwei Dimensionen das Potential $\Phi(\vec{x})$ in drei Dimensionen gewinnen (siehe Abb. 2).



(a) (b)

Abbildung 2: Äquipotentiallinien $\Phi(\vec{x})$ für das Quadrupolfeld in 2 Dimensionen (a) und 3 Dimensionen (b). Mit blau kennzeichnen wir $\Phi(\vec{x}) < 0$, mit rot $\Phi(\vec{x}) > 0$.

Bitte schreiben Sie auf die erste Seite des Übungsblattes Ihre Namen, Matrikelnummer und die Nummer Ihres Tutoriums.

Hinweis zum Übungsbetrieb:

Die online-Anmdeldung zur Vorleistung ist freigeschaltet. Bitte melden Sie sich zeitnah an.