Klassische Theoretische Physik III
Elektrodynamik WS 16/17

Institut für Kernphysik, KIT

Prof. T. Schwetz-Mangold, Dr. J. Enander, A. Pargner
`https://cr.ikp.kit.edu/pargner/teaching/theoc1617/`

6. Übung — Besprechung: 30.11.16

Aufgabe 1 — 7 Punkte

Im Folgenden lösen wir die Laplace-Gleichung in Zylinderkoordinaten (ϱ, φ, z) unter der Vorraussetzung, dass das Potential Φ nicht von z abhängt.

a) Zeigen Sie mittels eines Separationsansatz $\Phi(\varrho, \varphi) = R(\varrho)F(\varphi)$, dass die Laplace-Gleichung zu folgenden Differentialgleichungen für $R(\varrho)$ und $F(\varphi)$ führt:

$$\frac{\varrho}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varrho}\left(\varrho\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\varrho}\right) = C_1 \ , \tag{1}$$

$$\frac{1}{F}\frac{\mathrm{d}^2 F}{\mathrm{d}\varphi^2} = C_2 \ . \tag{2}$$

Wobei $C_{1,2}$ reele Konstanten sind, für die gilt

$$C_1 + C_2 = 0 \ . \tag{3}$$

2 Punkte

b) Argumentieren Sie zunächst, dass $C_2 \leq 0$ gelten muss. Wählen Sie $C_2 = -k^2$ mit $k^2 \geq 0$. Finden Sie die allgemeine Lösung für Gl. (2), zunächst für den Fall $k^2 \neq 0$. Welche Werte kann k annehmen?

Hinweis: Beachten Sie, dass $F(\varphi)$ eine periodische Funktion sein muss.

2 Punkte

c) Finden Sie für den Fall $k^2 \neq 0$ die Lösungen für Gl. (1). Machen Sie dazu einen Potenzansatz für $R(\varrho)$.

1 Punkt

d) Finden Sie für den speziellen Fall $k^2 = 0$ die Lösungen für Gl. (1) und (2). Zeigen Sie damit und mit Ihren Ergebnissen aus den vorigen Aufgabenteilen, dass die allgemeine Lösung durch

$$\Phi(\varrho, \varphi) = a_0 + b_0 \log\varrho + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\varrho^k\left(a_k\cos k\varphi + b_k\sin k\varphi\right) + \varrho^{-k}\left(c_k\cos k\varphi + d_k\sin k\varphi\right)\right] \ . \tag{4}$$

gegeben ist. Dabei sind $a_0, b_0, a_k, b_k, c_k, d_k \in \mathbb{R}$ Konstanten, welche durch die Randbedingungen bestimmt werden.

2 Punkte

Aufgabe 2 **7 Punkte + 2 Extrapunkte**

In der Vorlesung haben Sie die Legendre-Polynome $P_n(x)$ als Lösungen der Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_n(x)\right]+n(n+1)P_n(x)=0 \tag{5}$$

kennen gelernt. Dabei ist $n \in \mathbb{N}_0$. Wir beschäftigen uns im Folgenden mit einigen Eigenschaften der Legendre-Polynome.

a) Die Rodrigues-Formel besagt, dass das n-te Legendre-Polynom $P_n(x)$ durch

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[\left(x^2-1\right)^n\right] \tag{6}$$

gegeben ist. Beweisen Sie diese Aussage.

Definieren Sie dazu eine Funktion $y=(x^2-1)^n$ und überzeugen Sie sich zunächst, dass

$$(1-x^2)y''+2(n-1)xy'+2ny=0 \tag{7}$$

gilt. Differenzieren Sie Gl. (7) n mal und zeigen Sie damit, dass die n-te Ableitung von y die Legendre-Differentialgleichung erfüllt. Normieren Sie schließlich $y^{(n)}$ mit der Bedingung $P_n(x=1)=1$, um Gl. (6) zu beweisen.

Hinweis: Die Leibniz-Formel zur Differentation lautet

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(A(x)B(x)\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}A^{(k)}(x)B^{(n-k)}(x)\ . \tag{8}$$

Dabei bezeichnen wir mit $B^{(n)}(x)$ die n-te Ableitung von $B(x)$. Weiter können Sie ohne Beweis verwenden, dass für alle n gilt

$$y^{(n)}=2^n n! \text{ für } x=1\ . \tag{9}$$

3 Punkte

b) *Bonusaufgabe*: Beweisen Sie Gl. (9) für beliebige $n \in \mathbb{N}_0$.

2 Extrapunkte

c) Zeigen Sie die Orthogonalität der Legendre-Polynome,

$$\int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)\mathrm{d}x=0 \text{ für } n\neq m\ . \tag{10}$$

Benutzen Sie dazu die Rodrigues-Formel und partielle Integration.

Hinweis: Beachten Sie, dass Sie ohne Beschränkung der Allgemeinheit $m<n$ wählen können.

2 Punkte

d) Zeigen Sie, dass

$$\int_{-1}^{1}P_n(x)P_n(x)=\frac{2}{2n+1} \tag{11}$$

gilt.

Hinweis: Sie können ohne Beweis verwenden, dass

$$\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\mathrm{d}x=(-1)^n\frac{(n!)^2 2^{1+2n}}{(2n+1)!} \tag{12}$$

gilt.

2 Punkte

Aufgabe 3 **6 Punkte**

Betrachten Sie einen homogen geladenen Kreisring mit Radius R und Ladung q. Der Ring sei parallel zu x-y-Ebene ausgerichtet und sein Mittelpunkt befinde sich am Ort $(0, 0, b)$.

a) Geben Sie die Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ des Kreissrings in Zylinderkoordinaten (ϱ, φ, z) an.

1 Punkt

b) Bestimmen Sie das Potential $\Phi(\vec{r})$ für einen Punkt auf der z-Achse $\vec{r} = r\hat{e}_z$. Benutzen Sie dazu

$$\Phi(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \mathrm{d}^3 r' \tag{13}$$

und Ihr Ergebnis aus a). Drücken Sie $\Phi(\vec{r} = r\hat{e}_z)$ durch den Winkel α und Abstand r_0 aus. Diese sind definiert durch

$$\cos\alpha = \frac{b}{r_0} \ , \tag{14}$$

$$r_0 = \sqrt{R^2 + b^2} \ . \tag{15}$$

Hinweis: Das Ergebnis lautet

$$\Phi(\vec{r} = r\hat{e}_z) = \frac{q}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\alpha}} \ . \tag{16}$$

2 Punkte

c) Zeigen Sie, dass Ihr Ergebnis aus b) geschrieben werden kann als

$$\Phi(\vec{r} = r\hat{e}_z) = q \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(\cos\alpha) \ . \tag{17}$$

Dabei ist $r_> \equiv \max(r, r_0)$ und $r_< \equiv \min(r, r_0)$.

Hinweis: Benutzen Sie, dass

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2xz + z^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x) z^l \tag{18}$$

gilt, falls $|z| < 1$. Wir nennen $F(x, z) = \sqrt{1 - 2xz + z^2}$ die erzeugende Funktion der Legendre-Polynome $P_l(x)$.

2 Punkte

d) Argumentieren Sie, dass das allgemeine Potential $\Phi(\vec{r})$ für beliebige Punkte $\vec{r} = (r, \vartheta, \varphi)$ durch

$$\Phi(\vec{r}) = q \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(\cos\alpha) P_l(\cos\vartheta) \tag{19}$$

gegeben ist.

1 Punkt

Bitte schreiben Sie auf die erste Seite des Übungsblattes Ihre Namen, Matrikelnummer und die Nummer Ihres Tutoriums.

Hinweis zum Übungsbetrieb:

Die online-Anmdeldung zur Vorleistung ist freigeschaltet. Bitte melden Sie sich zeitnah an.