Klassische Theoretische Physik III
Elektrodynamik WS 16/17

Institut für Kernphysik, KIT

Prof. T. Schwetz-Mangold, Dr. J. Enander, A. Pargner
https://cr.ikp.kit.edu/pargner/teaching/theoc1617/

7. Übung — Besprechung: 7.12.16

Aufgabe 1 — 5 Punkte

Eine geladene Kugel mit Radius R befinde sich in einem homogenen, elektrischen Feld. In dieser Aufgabe zeigen wir, dass innerhalb der Kugel das gesamte Feld (d.h. die Summe aus homogenem Feld und dem Feld, welches von den Ladungen innerhalb der Kugel erzeugt wird) verschwindet. Das Potential des homogenen, elektrischen Feldes ist durch

$$\Phi(\vec{r}) = -E_0 r \cos\vartheta \tag{1}$$

gegeben.

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die induzierte Ladungsdichte in der Kugel durch

$$\rho(\vec{r}) = \frac{3}{4\pi} E_0 \cos\vartheta \delta(r-R) \; . \tag{2}$$

gegeben ist. Das bedeutet die induzierte Ladung befindet sich ausschließlich auf der Oberfläche der Kugel. Wir berechnen im Folgenden das Potential innerhalb der Kugel.

a) Geben Sie die Beziehung zwischen dem elektrischen Potential $\Phi(\vec{r})$ und der Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ an.

0.5 Punkte

b) Betrachten Sie das Potential auf der z-Achse, d.h. setzen Sie $\vartheta = 0$, und zeigen Sie, dass

$$\Phi(r,0) = \frac{3E_0}{2} \int_{-1}^{1} \mathrm{d}\cos\vartheta' \frac{\cos\vartheta' R^2}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2rR\cos\vartheta'}} \tag{3}$$

gilt.

0.5 Punkte

c) Drücken Sie den Integrand durch eine Summe über Legendre-Polynome aus. Benutzen Sie deren Orthogonalität, um zu zeigen, dass

$$\Phi(r,0) = E_0 r \tag{4}$$

gilt.

2 Punkte

d) Benutzen Sie die allgemeine Lösung für $\Phi(\vec{r})$ im Fall einer Zylindersymmetrie und leiten Sie damit

$$\Phi(r,\vartheta) = E_0 r \cos\vartheta \tag{5}$$

her.

1 Punkt

e) Benutzen Sie Ihr Ergebnis aus d) und argumentieren Sie, warum das elektrische Feld innerhalb der Kugel verschwinden muss.

1 Punkt

Aufgabe 2 **5 Punkte**

In der Vorlesung haben Sie gelernt, dass eine Kugel mit konstanter Ladung ausschließlich ein Monopolmoment besitzt. In dieser Aufgabe deformieren wir eine geladenen Kugel entlang der z-Achse und berechnen das daraus resultierende Dipol- und Quadrupolmoment.

a) Geben Sie die Gleichung an, welche die Oberfläche eines Ellipsoids mit den Halbachsen $a_1 = a_2 = 1$ und $a_3 = a$ bestimmt. Die dritte Halbachse ist damit ein freier Parameter und gibt an, wie stark wir die Kugel in einen Ellipsoid verformen.

1 Punkt

b) Berechnen Sie das Dipolmoment des Ellipsoids. Die Ladungsdichte ρ_0 innerhalb des Ellipsoids ist konstant.

Hinweis: Sie sollten finden, dass das Dipolmoment verschwindet.

2 Punkte

c) Berechnen Sie das Quadrupolmoment des Ellipsoids. Vergewissern Sie sich, dass dieses für den Fall $a = 1$, wie erwartet, verschwindet.

2 Punkte

Aufgabe 3 **10 Punkte + 4 Extrapunkte**

Betrachten Sie zwei unendlich große, geerdete Metallplatten, welche parallel zur xz-Ebene liegen und nur für $x > 0$ definiert sind. Eine Platte befinde sich am Ort $y = 0$, die andere am Ort $y = a$. Der Spalt zwischen den Platten sei bei $x = 0$ durch einen unendlich langen Streifen verschlossen. Dieser sei von den Platten isoliert und auf dem Potential $\Phi_0(y)$ gehalten. In dieser Aufgabe berechnen wir das Potential zwischen den Platten, indem wir die Laplace-Gleichung

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \tag{6}$$

lösen.

a) Argumentieren Sie zunächst, warum das Potential Φ nur von x und y abhängen kann und nicht von z. D.h. Sie müssen nur die zweidimensionale Laplace-Gleichung

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \tag{7}$$

betrachten. Argumentieren Sie weiter, dass die Randbedingungen wie folgt lauten müssen: $\Phi = 0$ für $y = 0$ und $y = a$, $\Phi = \Phi_0(y)$ für $x = 0$ und $\Phi \to 0$ für $x \to \infty$.

2 Punkte

b) Benutzen Sie einen Separationsansatz $\Phi(x, y) = X(x)Y(y)$. Zeigen Sie, dass damit folgenden Differentialgleichungen für X und Y gelten:

$$\frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2} = C_1 \ , \tag{8}$$

$$\frac{1}{Y}\frac{\mathrm{d}^2 Y}{\mathrm{d}y^2} = C_2 \ . \tag{9}$$

Welcher Zusammenhang gilt zwischen C_1 und C_2?

1 Punkt

c) Finden Sie die Lösungen von Gl. (8) und (9). Benutzen Sie die Ergebnisse in Ihrem Ansatz und finden Sie damit

$$\Phi(x,y) = \left(A\mathrm{e}^{kx} + B\mathrm{e}^{-kx}\right)(C\sin ky + D\cos ky)\ . \tag{10}$$

Dabei steht k im Zusammenhang mit C_1 und C_2, A, B, C und D sind Integrationskonstanten.

2 Punkte

d) Bestimmen Sie die Konstanten A, B, C und D mittels der Randbedingungen. Zeigen Sie, dass damit

$$\Phi(x,y) = C\mathrm{e}^{-kx}\sin ky,\ \text{mit}\ k = \frac{n\pi}{a} \tag{11}$$

gilt. Dabei ist n eine positive, ganze Zahl. Argumentieren Sie nun, warum die Randbedingung $\Phi = \Phi_0(y)$ für $x = 0$ für ein festes n im Allgemeinen nicht erfüllt werden kann.

2 Punkte

e) Um die Randbedingung $\Phi = \Phi_0(y)$ zu erfüllen, müssen wir über Lösungen mit unterschiedlichen n und Konstanten C_n summieren. Argumentieren Sie zunächst, warum diese Summe immer noch eine Lösung der Laplace-Gleichung ist. Schreiben Sie die allgemeine Lösung $\Phi(x,y)$ und die Randbedingung für $x = 0$ als Summe über Lösungen mit verschiedenen C_n. Benutzen Sie die Orthogonalitätsrelation

$$\int_0^a \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right)\sin\left(\frac{n'\pi y}{a}\right)\mathrm{d}y = \begin{cases} 0, & n \neq n'\ , \\ \frac{a}{2}, & n = n' \end{cases} \quad , \tag{12}$$

um die allgemeine Form von C_n in Abhängigkeit von $\Phi_0(y)$ zu bestimmen.

3 Punkte

f) *Bonusaufgabe*: Bestimmen Sie die exakte Form von C_n und damit $\Phi(x,y)$ für den Fall, dass Φ_0 konstant ist.

4 Extrapunkte

Bitte schreiben Sie auf die erste Seite des Übungsblattes Ihre Namen, Matrikelnummer und die Nummer Ihres Tutoriums.

Hinweis zum Übungsbetrieb:

Die online-Anmdeldung zur Vorleistung ist freigeschaltet. Bitte melden Sie sich zeitnah an.