Klassische Theoretische Physik III
Elektrodynamik WS 16/17

Institut für Kernphysik, KIT

Prof. T. Schwetz-Mangold, Dr. J. Enander, A. Pargner
https://cr.ikp.kit.edu/pargner/teaching/theoc1617/

9. Übung — Besprechung: 11.01.17

Aufgabe 1 — 7 Punkte

In dieser Aufgabe beschäftigen wir uns mit der interessanten Frage nach magnetischen Monopolen. Wir beginnen damit, dass wir die Maxwell-Gleichungen zunächst in symmetrischer Form schreiben:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho_e, \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}_e \ ,$$
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 4\pi\rho_m, \qquad -\vec{\nabla} \times \vec{E} = \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}_m \ .$$

a) Zeigen Sie, dass aus den symmetrischen Maxwell-Gleichungen folgende Erhaltungssätze folgen

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_e = 0, \qquad \frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_m = 0 \ .$$

1 Punkt

a) Zeigen Sie, dass die Maxwell-Gleichungen invariant unter der *dualen* Transformation

$$\vec{E}' = \vec{E}\cos\alpha + \vec{B}\sin\alpha \ , \qquad \vec{B}' = -\vec{E}\sin\alpha + \vec{B}\cos\alpha,$$

sind, falls die Ströme sich nach

$$\rho_e' = \rho_e \cos\alpha + \rho_m \sin\alpha, \qquad \vec{j}_e' = \vec{j}_e \cos\alpha + \vec{j}_m \sin\alpha,$$
$$\rho_m' = -\rho_e \sin\alpha + \rho_m \cos\alpha, \qquad \vec{j}_m' = -\vec{j}_e \sin\alpha + \vec{j}_m \cos\alpha,$$

transformieren.

2 Punkte

b) Die Maxwell-Gleichungen sind also unverändert unter der *dualen* Transformation. Das bedeutet wir haben die Freiheit zu entscheiden, was wir als magnetisch und was wir als elektrisch bezeichnen. Zeigen Sie, dass man mit einer geeigneten Wahl für den Winkel α immer $\rho_m' = \vec{j}_m' = 0$ wählen kann.

1 Punkt

c) Nehmen Sie nun an, dass es mehrere Quellen für das elektrische und magnetische Feld gibt, d.h. verschiedene Teilchenspezies. Leiten Sie eine Bedingung an die Ladung bzw. Ströme her, unter der die Transformation in b) weiterhin möglich ist.

1 Punkt

d) Geben Sie eine allgemeine Form der Lorentz-Kraft $\vec{F}_L$ an. Überprüfen Sie Ihre Aussage indem Sie zeigen, dass $\vec{F}_L$ invariant unter einer *dualen* Transformation ist.

2 Punkt

Aufgabe 2 **4 Punkte**

Im Folgenden lösen wir die Wellengleichung

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi\left(\vec{x},t\right) = 0 \ ,$$

wobei $\Delta = \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, durch eine Transformation in den Fourier-Raum.

a) Geben Sie die Fourier-Transformierte $\tilde{\phi}(\vec{k},t)$ von $\phi(\vec{x},t)$ an und setzen Sie diese in die Wellengleichung ein.

1 Punkt

b) Argumentieren Sie, warum jede Fourier-Mode die Gleichung

$$\left(-|\vec{k}|^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\tilde{\phi}(\vec{k},t) = 0$$

einzeln erfüllen muss. Was ist der Vorteil dieser Gleichung gegenüber der Wellengleichung im Real-Raum.

2 Punkte

c) Lösen Sie die Gleichung im Fourier-Raum und bestimmen Sie den Zusammenhang zwischen $|\vec{k}|$, c und der Frequenz jeder Fourier-Mode.

1 Punkt

Aufgabe 3 **3 Punkte**

In der vorherigen Aufgabe haben Sie die Lösung der homogenen Wellengleichung für jede einzelne Fourier-Mode hergeleitet. Integrieren wir über alle Moden, finden wir die Lösung im Real-Raum. In voller Allgemeinheit schreiben wir also

$$\phi(\vec{x},t) = \mathrm{Re}\int d^3k A_{\vec{k}} e^{i(\vec{x}\cdot\vec{k}-\omega_k t)} \ .$$

Dabei ist $A_{\vec{k}}$ ein komplexe Zahl. Zeigen Sie nun, dass

$$A_{\vec{k}} = \left(\phi_{\vec{k}} + \frac{i\dot{\phi}_{\vec{k}}}{\omega}\right)$$

gilt. Hierbei sind $\phi_{\vec{k}}$ und $\dot{\phi}_{\vec{k}}$ die Fourier-Transformierten von $\Phi(\vec{x},0)$ und $\dot{\Phi}(\vec{x},0)$.

Aufgabe 4 **6 Punkte**

Betrachten Sie zwei monochromatische Wellen mit identischer Frequenz und entgegengesetzter zirkularer Polarisation. Beide propagieren mit gleicher Geschwindigkeit in die z-Richtung. In dieser Aufgabe bestimmen wir die effektive Polarisation als Funktion der relativen Amplituden der beiden Wellen.

a) Das elektrische und das magnetische Feld einer monochromatischen Welle ist durch

$$\vec{E} = \mathrm{Re}\vec{\epsilon}(\vec{r},t), \qquad \vec{\epsilon} = \vec{\epsilon}_0 e^{i(\vec{r}\cdot\vec{k}-\omega t)}$$
$$\vec{B} = \mathrm{Re}\vec{\beta}(\vec{r},t), \qquad \vec{\beta} = \vec{\beta}_0 e^{i(\vec{r}\cdot\vec{k}-\omega t)}$$

gegeben. Die Maxwell-Gleichungen geben eine bestimmte Beziehung zwischen $\vec{k}$, $\vec{E}$ und $\vec{B}$ vor. Leiten Sie diese Beziehung her.

1 Punkte

b) Führen Sie nun die drei orthogonalen Vektoren $\vec{u}$, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ ein und schreiben Sie

$$\vec{\epsilon}(\vec{r},t) = (E_1\vec{\epsilon_1} + E_2\vec{\epsilon_2})\, e^{i(\vec{r}\cdot\vec{k}-\omega t)} \ ,$$
$$\vec{\beta}(\vec{r},t) = \vec{u} \times \vec{\epsilon}(\vec{r},t) \ .$$

Dabei sind E_1 und E_2 beliebige komplexe Zahlen. Drücken Sie diese durch ihre Amplituden und Phase aus und bestimmen Sie drei mögliche Polarisationen (linear, elliptisch, zirkular) entsprechend der Phasendifferenz und der relativen Amplitude zwischen E_1 und E_2. Bestimmen Sie auch in welchem Fall die Polarisation links- oder rechtshändig ist.

3 Punkte

c) Geben Sie nun die Ausdrücke für die beiden Wellen mit den in der Aufgabenstellung spezifizierten Eigenschaften an. Schreiben Sie die effektive Welle als lineare Superposition der zwei einzelnen Wellen. Argumentieren Sie, warum die lineare Superposition immer noch eine Lösung der Bewegungsleichung ist (Bermerken Sie, dass diese profane Eigenschaft in der Natur nicht immer erfüllt sein muss, z.B. beim Gravitationsfeld in der Allgemeinen Relativitätstheorie). Bezeichnen Sie die Amplitude der einzelnen Wellen mit A und B. Betrachten Sie die effektive Lösung für die Fälle

$$\begin{aligned} A &= B, \\ A &= -B, \\ A &= 0, \\ B &= 0, \\ |A| &> |B|, \\ |A| &< |B| \end{aligned}$$

und bestimmen Sie die Polarisation und ihre Richtung.

2 Punkte

Bitte schreiben Sie auf die erste Seite des Übungsblattes Ihre Namen, Matrikelnummer und die Nummer Ihres Tutoriums.

Hinweis zum Übungsbetrieb:

Die online-Anmdeldung zur Vorleistung ist freigeschaltet. Bitte melden Sie sich zeitnah an.