# Klassische Theoretische Physik III
# Elektrodynamik WS 16/17

Institut für Kernphysik, KIT

Prof. T. Schwetz-Mangold, Dr. J. Enander, A. Pargner
`https://cr.ikp.kit.edu/pargner/teaching/theoc1617/`

## 10. Übung — Besprechung: 18.01.17

### Aufgabe 1 — 4 Punkte

Mit der Bedingung, dass die Maxwell-Gleichungen invariant unter Ladungskonjugation ($C$), Parität ($P$) und Zeitumkehr ($T$) sind, leiten wir in dieser Aufgabe die Tranformationseigenschaften des magnetischen und elektrischen Feldes unter $C$, $P$ und $T$ her. Unter $C$ Transformationen gilt, für die Ladung offensichtlich $q \to -q$ und entsprechend für die Stromdichte $\vec{j} \to -\vec{j}$. Unter $P$ gilt $\vec{x} \to -\vec{x}$ und unter $T$ gilt $t \to -t$. Die elektrische Ladung $q$ verhält sich unter $P$ und $T$ wie ein Skalar.

a) Berechenen Sie, wie sich zeitliche und räumliche Ableitungen unter $P$ und $T$ Transformationen verhalten. Welches Transformationsverhalten folgt daraus für die Divergenz und die Rotation unter $P$ und $T$?

*1 Punkt*

b) Betrachten Sie nun die Maxwell-Gleichungen jeweils unter $C$, $P$ und $T$ Transformationen. Wie müssen sich das elektrische und magnetische Feld jeweils transformieren, damit die Gleichungen invariant unter diesen Transformationen sind?

*2 Punkte*

c) Auf dem letzten Übungsblatt haben Sie die allgemeine Form der Lorentz-Kraft $\vec{F}_\mathrm{L}$

$$\vec{F}_\mathrm{L} = q_\mathrm{e}\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) + q_\mathrm{m}\left(\vec{B} - \vec{v} \times \vec{E}\right) \tag{1}$$

mit den magnetischen Ladungen $q_\mathrm{m}$ hergeleitet. Benutzen Sie ihr Ergebnis aus b) und betrachten Sie $\vec{F}_\mathrm{L}$ nach einer $P$ Transformation. Wie muss sich die magnetische Ladung transformieren, damit sich $\vec{F}_\mathrm{L}$ wie ein Vektor unter $P$ verhält?

*1 Punkt*

### Aufgabe 2 — 6 Punkte

In dieser Aufgabe zeigen wir, dass in einem Hohlleiter keine transversalelektromagnetischen (TEM) Wellen entstehen können. Wir betrachten dazu einen Hohlleiter, welcher in $x$- und $y$-Richtung auf die Länge $L_x$ bzw. $L_y$ durch Metallplatten begrenzt und in $z$-Richtung unbegrenzt sei. In der Vorlesung haben Sie hergeleitet, dass das $\vec{E}$-Feld einer in $z$-Richtung propagierenden Welle durch

$$E_x = C_x \cos\frac{l\pi x}{L_x} \sin\frac{m\pi y}{L_y} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)} \,, \tag{2}$$

$$E_y = C_y \sin\frac{l\pi x}{L_x} \cos\frac{m\pi y}{L_y} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)} \,, \tag{3}$$

$$E_x = C_z \sin\frac{l\pi x}{L_x} \sin\frac{m\pi y}{L_y} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)} \tag{4}$$

gegeben ist. Dabei ist $l, m = 0, 1, 2, \ldots$ mit der üblichen Einschränkung, dass jeweils nur $l = 0$ oder $m = 0$ sein darf. Die Kreisfrequenz $\omega$ der Welle ist durch

$$\omega^2 = c^2 \left( \frac{l^2\pi^2}{L_x^2} + \frac{m^2\pi^2}{L_y^2} + k^2 \right) \tag{5}$$

bestimmt.

a) Bestimmen Sie zunächst die minimale Frequenz $\omega_{\text{min}}$ mit der sich Wellen in einem solchen Leiter ausbreiten können. Welche Ausmaße muss ein Hochpassfilter mit quadratischer Schnittfläche ($L_x = L_y$) mindestens haben, um Frequenzen unterhalb von $f = 30$ GHz zu filtern?

*0.5 Punkte*

b) Machen Sie für das magnetische Feld einen Ansatz $\vec{B}(\vec{x}, t) = \vec{B}(\vec{x}) \exp(-\mathrm{i}\omega t)$ und zeigen Sie, dass aus den Maxwell-Gleichungen

$$\vec{B} = -\frac{\mathrm{i}c}{\omega} \mathrm{rot}\vec{E} \tag{6}$$

folgt.

*0.5 Punkte*

c) Zeigen Sie nun, dass aus $E_z = B_z = 0$, $\vec{E} = \vec{B} = 0$ folgt. D.h. in diesem Wellenleiter gibt es keine TEM Wellen.

*Hinweis*: Überlegen Sie sich, was für $C_z$, $l$ bzw. $m$ gelten muss, damit $E_z = 0$ ist. Benutzen Sie diese Bedingungen zusammen mit $B_z = 0$, um zu zeigen, dass daraus $\vec{E} = \vec{B} = 0$ folgt.

*3 Punkte*

d) In diesem Wellenleiter sind also keine TEM Wellen möglich. Im Allgemeinen können wir die Wellen im Leiter aber als eine Überlagerung aus transversalelektrischen (TE) und transversalmagnetischen (TM) Wellen schreiben. Begründen Sie, warum der Poynting-Vektor $\vec{S} = c(\vec{E} \times \vec{B})/(4\pi)$ im Allgemeinen nicht in $z$-Richtung zeigt. In welche Richtung zeigt das zeitliche Mittel $\langle \vec{S} \rangle$?

*2 Punkte*

## Aufgabe 3 — 10 Punkte

In der Vorlesung haben Sie die Lienard-Wiechert-Potentiale für eine bewegte Punktladung $q$

$$\Phi_{\text{ret}} = \frac{qc}{Rc - \vec{R} \cdot \vec{v}} \quad \text{und} \quad \vec{A}_{\text{ret}} = \frac{\vec{v}}{c^2} \Phi_{\text{ret}} \tag{7}$$

kennen gelernt. Dabei ist

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}\,'(t_{\text{r}}) \ , \tag{8}$$

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}\,'}{\mathrm{d}t_{\text{r}}} \ , \tag{9}$$

$$R = c\,(t - t_{\text{r}}) \ , \tag{10}$$

$t_{\text{r}}$ ist die retardierte Zeit und $c$ die Lichtgeschwindigkeit. Das durch die bewegte Ladung erzeugte elektrische Feld $\vec{E}$ an einem beliebigen Punkt $\vec{r}$ und zu einer beliebigen Zeit $t > t_{\text{r}}$ lässt sich aus den Potentialen nach

$$\vec{E}(t, \vec{r}) = -\vec{\nabla}\Phi_{\text{ret}} - \partial_t \vec{A}_{\text{ret}} \tag{11}$$

bestimmen. Die Berechnung von $\vec{E}$ wird dadurch erschwert, dass die retardierte Zeit $t_{\text{r}}$ von $\vec{r}$ und $t$ abhängt. Nichtsdestotrotz berechnen wir in dieser Aufgabe $\vec{E}(t, \vec{r})$ für eine beliebig bewegte Punktladung $q$.

a) Beginnen Sie damit $\vec{\nabla}\Phi_{\text{ret}}$ zu berechnen. Zeigen Sie zunächst, dass

$$\vec{\nabla}\Phi_{\text{ret}} = \frac{qc}{\left(Rc - \vec{R}\cdot\vec{v}\right)^2}\left[c^2\vec{\nabla}t_{\text{r}} + \vec{v} + \left(\vec{R}\cdot\vec{a} - v^2\right)\vec{\nabla}t_{\text{r}}\right] \tag{12}$$

gilt. Dabei ist $\vec{a} = \mathrm{d}\vec{v}/\mathrm{d}t_{\text{r}}$ die Beschleunigung des Teilchens zur retardierten Zeit $t_{\text{r}}$. Benutzen Sie nun das Ergebnis aus der Vorlesung

$$\vec{\nabla}t_{\text{r}} = -\frac{\vec{R}}{Rc - \vec{R}\cdot\vec{v}}\ , \tag{13}$$

um zu zeigen, dass

$$\vec{\nabla}\Phi_{\text{r}} = \frac{qc}{\left(Rc - \vec{R}\cdot\vec{v}\right)^3}\left[\left(Rc - \vec{R}\cdot\vec{v}\right)\vec{v} - \left(c^2 - v^2 + \vec{R}\cdot\vec{a}\right)\vec{R}\right] \tag{14}$$

gilt.

*Hinweis*: Ein nützlicher Zusammenhang ist

$$\vec{\nabla}\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right) = \left(\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{B} + \left(\vec{B}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{A} + \vec{A}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right) + \vec{B}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)\ . \tag{15}$$

*4 Punkte*

b) Benutzen Sie nun

$$\frac{\partial t_{\text{r}}}{\partial t} = \frac{cR}{Rc - \vec{R}\cdot\vec{v}}\ , \tag{16}$$

um zu zeigen, dass

$$\partial_t\vec{A}_{\text{ret}} = \frac{qc}{\left(Rc - \vec{v}\cdot\vec{R}\right)^3}\left[\left(Rc - \vec{v}\cdot\vec{R}\right)\left(\frac{R}{c}\vec{a} - \vec{v}\right) + \frac{R}{c}\left(c^2 - v^2 + \vec{R}\cdot\vec{a}\right)\vec{v}\right] \tag{17}$$

gilt.

*3 Punkte*

c) Führen Sie nun den Vektor $\vec{u} = c\hat{R} - \vec{v}$ ein. Dabei ist $\hat{R} = \vec{R}/R$. Benutzen Sie diese Definition und ihre Ergebnisse aus den vorherigen Aufgabenteilen, um zu zeigen, dass das durch die bewegte Ladung $q$ erzeugte elektrische Feld $\vec{E}$ als

$$\vec{E} = \frac{qR}{\left(\vec{R}\cdot\vec{u}\right)^3}\left[\left(c^2 - v^2\right)\vec{u} + \vec{R}\times\left(\vec{u}\times\vec{a}\right)\right]\ . \tag{18}$$

geschrieben werden kann.

*2 Punkte*

d) Betrachten Sie den Spezialfall einer gleichförmig bewegten Ladung, d.h. $\vec{a} = 0$. Benutzen Sie, dass ein Bezugsystem gewählt werden kann, in dem $\vec{v} = 0$ gilt. Berechnen Sie das Feld $\vec{E}$ in diesem Fall. Erkennen Sie das Ergebnis wieder?

*1 Punkt*

*Bitte schreiben Sie auf die erste Seite des Übungsblattes Ihre Namen, Matrikelnummer und die Nummer Ihres Tutoriums.*

## Hinweis zum Übungsbetrieb:

Die online-Anmdeldung zur Vorleistung ist freigeschaltet. Bitte melden Sie sich zeitnah an.