Klassische Theoretische Physik III
Elektrodynamik WS 16/17

Institut für Kernphysik, KIT

Prof. T. Schwetz-Mangold, Dr. J. Enander, A. Pargner
`https://cr.ikp.kit.edu/pargner/teaching/theoc1617/`

12. Übung — Besprechung: 01.02.17

Aufgabe 1 — 6 Punkte

In dieser Aufgabe betrachten wir einige Eigenschaften der Lorentz-Transformationen. Zwei Bezugssystem seien durch folgende Relation in Verbindung gesetzt:

$$\begin{aligned} t &= \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right), \\ x &= \gamma\left(x' + vt'\right), \\ y &= y', \\ z &= z', \end{aligned}$$

wobei $\gamma \equiv 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Das Bezugssystem mit den gestrichenen Koordinaten bezeichnen wir mit S', das mit den ungestrichenen Koordinaten mit S. Aus der Perspektive von S bewegt sich S' mit der Geschwindigkeit v in positive x-Richtung. Aus der Perspektive von S' bewegt sich S mit v in negative x'-Richtung.

a) Überprüfen Sie, dass das Raumzeit-Intervall $(\Delta s)^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2$ invariant unter dieser Koordinatentransformation ist.

2 Punkte

b) Nehmen Sie an, dass zwei, durch $\Delta x'$ räumlich getrennte, Ereignisse A und B im Bezugssystem S' zur gleichen Zeit geschehen. Geschehen sie auch gleichzeitig in S? Begründen Sie Ihre Antwort.

2 Punkte

c) Betrachten Sie ein Lineal, dass in S am Ursprung platziert sei. Die Länge des Lineals sei $\Delta x = 10$ m. In S' erscheint es als würde sich das Lineal in negative x-Richtung mit der Geschwindigkeit v bewegen. Nehmen Sie an, dass die Geschwindigkeit die halbe Lichtgeschwindigkeit beträgt. Welche Länge hat das Lineal in S'?

1 Punkt

d) Ein Raumschiff ruhe am Ursprung in S' und sende eine Sonde mit drei Viertel der Lichtgeschwindigkeit in positive x'-Richtung. Wie schnell bewegt sich die Sonde in S, wenn die Relativgeschwindigkeit zwischen den Bezugssystemen die halbe Lichtgeschwindigkeit beträgt?

1 Punkt

Aufgabe 2 — 6 Punkte

Eine Lorentz-Transformation sei durch

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

gegeben. Wir benutzen folgende Konvention: Ob ein Index oben oder unten steht signalisiert das Verhalten unter einer Koordinatentransformation. Der linke Index bezeichnet die Zeilenelemente, der rechte Index die Spaltenelemente. Die Minkowski-Metrik sei durch

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Zeigen Sie mit der angegebenen Lorentz-Transformation explizit, dass $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$. Bemerken Sie, dass diese Beziehung in Komponentenschreibweise durch

$$\left(\Lambda^T\right)_\alpha{}^\mu \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\beta = \eta_{\alpha\beta}$$

ausgedrückt werden kann. Bemerken Sie weiter, dass $\left(\Lambda^T\right)_\alpha{}^\mu = \Lambda^\mu{}_\alpha$.

2 Punkte

b) Benutzen Sie nun, dass $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$, um eine allgemeine Relation zwischen der Inversen von Λ und der Transponierten von Λ und η herzuleiten. Benutzen Sie Ihr Ergebins, um Λ^{-1} für die in Gl. (1) betrachtete Transformation explizit anzugeben. Verifizieren Sie, dass Ihr Ergebnis äquivalent dazu ist, v durch $-v$ in Gl. (1) zu ersetzen.

2 Punkte

c) Berechnen Sie nun $\Lambda^{-1}\Lambda$ für diese Transformation und überprüfen Sie so, dass Λ^{-1} in der Tat die Inverse von Λ ist.

1 Punkt

d) Definieren Sie einen Kovektor $V_\mu = \eta_{\mu\nu} V^\nu$. Der Kovektor transformiert sich nach $\left(\Lambda^{-1}\right)^\nu{}_\mu V_\nu$. Zeigen Sie, dass $V_\mu V^\mu$ invariant unter Lorentz-Transformationen ist. Benutzen Sie dies, um zu zeigen, dass das Raum-Zeit-Intervall invariant unter Lorentz-Transformationen ist.

1 Punkt

Aufgabe 3 — 4 Punkte

Durch Wechselwirkung zwischen kosmischer Strahlung und Teilchen in der Atmosphäre werden Myonen erzeugt. Nehmen Sie an dass N_0 Myonen zum Zeitpunkt $t = 0$ erzeugt werden. Da Myonen zerfallen, werden zu einem späteren Zeitpunkt t nur noch

$$N = N_0 e^{-t/\tau}$$

übrig sein. Hier ist $\tau = 2.20\ \mu$s die mittlere Lebenszeit eines Myons.

a) Nehmen Sie an, dass sich die Myonen mit einer Geschwindigkeit $v = 0.95c$ bewegen. Was ist die Lebenszeit der Myonen für einen Beobachter, der relativ zur Erde gesehen ruht?

2 Punkte

b) Wie viele Myonen sind übrig, nachdem sie eine Strecke von 15 km zurückgelegt haben?

2 Punkte

Aufgabe 4 **4 Punkte**

In der speziellen Relativitätstheorie ist der Impuls eines Teilchens durch $p = \gamma m v$ und seine Energie durch $E = \gamma m c^2$ gegeben.

a) Beweisen Sie die Energie-Impuls-Beziehung

$$E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2 \ .$$

Dies ist eine fundamentale Relation in der Teilchenphysik. Was folgt nach dieser Gleichung für ein Teilchen mit verschwindender Ruhemasse?

2 Punkte

b) Ein ruhendes Pion zerfalle in ein Antimyon und ein Myon-Neutrino, $\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$. Berechnen Sie die Energie des Myons und des Myon-Neutrinos in Abhängigkeit der Masse des Pions. Benutzen Sie dazu die Erhaltung des Viererimpulses (d.h. $p_\pi^\mu = p_\mu^\mu + p_\nu^\mu$) und die Energie-Impuls-Beziehung. Sie können das Myon-Neutrino als masselos behandeln.

2 Punkte

Bitte schreiben Sie auf die erste Seite des Übungsblattes Ihre Namen, Matrikelnummer und die Nummer Ihres Tutoriums.

Hinweis zum Übungsbetrieb:

Die online-Anmdeldung zur Vorleistung ist freigeschaltet. Bitte melden Sie sich zeitnah an.