Klassische Theoretische Physik III
Elektrodynamik WS 16/17

Institut für Kernphysik, KIT

Prof. T. Schwetz-Mangold, Dr. J. Enander, A. Pargner
`https://cr.ikp.kit.edu/pargner/teaching/theoc1617/`

13. Übung — Besprechung: 08.02.17

Aufgabe 1 — 8 Punkte

Der elektromagnetische Feldstärketensor ist durch $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ gegeben.

a) Benutzen Sie die Beziehung zwischen A^μ und $\vec{E}$ bzw. $\vec{B}$, um $F^{\mu\nu}$ durch das elektrische und magnetische Feld auszudrücken.

1 Punkt

b) Drücken Sie nun auch $F_{\mu\nu}$ and $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$ durch $\vec{E}$ und $\vec{B}$ aus.

2 Punkte

c) Benutzen Sie Ihre Ergebnisse, um zu zeigen, dass

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\mu, \qquad \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$$

zu den Ihnen bekannten Maxwell-Gleichungen führen.

1 Punkt

d) Da sich $F^{\mu\nu}$ wie ein Tensor transformiert, gilt unter einer Lorentz-Transformationen Λ

$$F^{\mu\nu} \to \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta F^{\alpha\beta} \ . \tag{1}$$

Benutzen Sie diesen Zusammenhang, um das Transformationsverhalten von $\vec{E}$ und $\vec{B}$ zu bestimmen. Identifizieren Sie dazu die neuen Felder $\vec{E}'$ und $\vec{B}'$, nachdem Sie eine Lorentz-Tranformation für $F^{\mu\nu}$ durchgeführt haben. Benuzten Sie dazu die explizite Form

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

für Λ in Gl. (**??**).

2 Punkte

e) Benutzen Sie nun, dass sich A^μ wie ein Vierervektor transformiert, um nochmals das Transformationsverhalten von $\vec{E}$ und $\vec{B}$ herzuleiten. Benutzen Sie dieselbe Form für Λ wie in d).

Hinweis: Bedenken Sie auch die Ableitungen entsprechend zu transformieren, wenn Sie einen Zusammenhang zwischen dem transformierten Vierervektor und den Feldern $\vec{E}'$ und $\vec{B}'$ herleiten wollen.

2 Punkte

Aufgabe 2 — 3 Punkte

Ein Teilchen mit Masse m und Ladung q bewege sich in einem konstanten, homogenen Magnetfeld $\vec{B} = B\vec{e}_z$. Lösen Sie die relativistische Bewegungsgleichung mit den Anfangsbedingungen

$$u^\alpha\left(\tau = 0\right) = \begin{pmatrix} \gamma_0 c \\ \gamma_0 v_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

wobei $\gamma_0 = (1 - v_0^2/c^2)^{-1/2}$ und v_0 die Anfangsgeschwindigkeit ist. Drücken Sie Ihr Ergebnis als Flugbahn $x(\tau)$ aus, wobei sich das Teilchen bei $\tau = 0$ am Ursprung befinde. Identifizieren Sie die Frequenz der Bewegung. Diese Frequenz bezeichnen wir als Zyklotronfrequenz. Welche Art von Bewegung beschreibt diese Flugbahn?

Aufgabe 3 — 6 Punkte

Die Lagrange-Dichte der Maxwellschen Theorie lautet

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - c^{-1} A_\mu J^\mu \ .$$

Aus dem Hamiltonschen Prinzip der extremalen Wirkung erhält man die Euler-Lagrange-Gleichungen für A^μ. D.h. man varriert die Wirkung $S = \int d^4x\mathcal{L}$ nach dem Feld A^μ und fordert, dass $\delta S = 0$.

a) Benutzen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu A_\nu\right)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = 0 \ ,$$

um die inhomogenen Maxwell-Gleichungen herzuleiten.

2 Punkte

b) Benutzen Sie nun $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\mu A^\mu$, um zu zeigen, dass

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$$

automatisch erfüllt ist. $\tilde{F}^{\mu\nu}$ sei dabei definiert, wie in Aufgabe 1. Bemerken Sie, dass dies den homogenen Maxwell-Gleichungen entspricht.

1 Punkt

c) Die Wirkung der Maxwellschen Theorie erhält man, indem man über die Lagrange-Dichte integriert, $S = \int d^4x\mathcal{L}$. Zeigen Sie, dass diese Wirkung eichinvariant (d.h. S bleibt unverändert) unter Eichtransformationen der Form

$$A^\mu \to A^\mu + \partial^\mu \Lambda(x)$$

ist.

Hinweis: Benutzen Sie partielle Integration. Weiter müssen Sie eine bekannte Bediungung für den Strom J^μ verwenden. Diese Bedingung wird automatisch von den Bewegungsgleichungen erfüllt.

2 Punkte

d) Überzeugen Sie sich nun auch davon, dass die Lagrange-Dichte der Maxwellschen Theorie invariant unter Lorentz-Transformationen ist. Dies muss erfüllt sein, um die Äquivalenz zwischen allen Intertialsystemen zu Gewähr leisten (erstes Einsteinsches Postulat).

1 Punkt

Aufgabe 4 **3 Punkte**

Betrachten Sie ein Elektron, welches am Urpsrung ruhe. Relativ zu diesem Elektron bewege sich ein Beobachter mit konstanter Geschwindigkeit entlang der x-Achse. Berechnen Sie das magnetische und das elektrische Feld, welches der Beobachter *im Koordinatensystem des Beobachters* beobachtet. Benutzen Sie dazu die in Aufgabe 1 angegebene Lorentz-Transformation.

Bitte schreiben Sie auf die erste Seite des Übungsblattes Ihre Namen, Matrikelnummer und die Nummer Ihres Tutoriums.

Hinweis zum Übungsbetrieb:

Die online-Anmdeldung zur Vorleistung ist freigeschaltet. **Bitte melden Sie sich bis spätestens 10.02.17, 12.00 Uhr an!**

Hinweis zu den Klausuren:

Hinweise zu den Klausuren werden in Kürze auf der Vorlesungshomepage `https://cr.ikp.kit.edu/pargner/teaching/theoc1617/` veröffentlicht.