Klassische Theoretische Physik III
Elektrodynamik WS 18/19

Institut für Kernphysik, KIT

Prof. T. Schwetz-Mangold, Dr. O. Fischer, A. Pargner

1. Übung **Besprechung: 24.10.18**

Aufgabe 1 **6 Punkte + 4 Bonuspunkte**

Das Kreuzprodukt zwischen zwei Vektoren $\vec{A}, \vec{B}$ in $\mathbb{R}^3$ kann in kartesischen Koordinaten (mit den drei Basisvektoren e_1, e_2, e_3) wie folgt geschrieben werden:

$$\left(\vec{A} \times \vec{B}\right)_i = \sum_{k=1}^{3} \sum_{l=1}^{3} \epsilon_{ikl} A_k B_l \ , \tag{1}$$

Hierbei bezeichnet der Index $i = 1, 2, 3$ die Komponente des Vektors $\vec{A} \times \vec{B}$ (die Projektion des Vektors auf den Basisvektor e_i) und ϵ_{ikl} ist das Levi-Civita-Symbol dritter Stufe. Per Definition gilt: $\epsilon_{123} = 1$ und ebenso bei geraden Permutationen der Indizes, -1 bei ungeraden Permutationen und 0 sonst. Es gilt:

$$\sum_{l=1}^{3} \epsilon_{ikl} \epsilon_{lmn} = \sum_{l=1}^{3} \epsilon_{ikl} \epsilon_{mnl} = \delta_{im}\delta_{kn} - \delta_{in}\delta_{km} \ . \tag{2}$$

Hier ist δ_{ij} das Ihnen bekannte Kronecker-Delta mit $\delta_{ij} = 0$ für $i \neq j$ und 1 sonst.
Im Folgenden sind $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ in $\mathbb{R}^3$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ und es ist Gl. (1) zu benutzen.

a) Zeigen Sie, dass das Kreuzprodukt bilinear ist:

$$\vec{A} \times \left(\beta\vec{B} + \gamma\vec{C}\right) = \beta\left(\vec{A} \times \vec{B}\right) + \gamma\left(\vec{A} \times \vec{C}\right) \ , \tag{3}$$

$$\left(\alpha\vec{A} + \beta\vec{B}\right) \times \vec{C} = \alpha\left(\vec{A} \times \vec{C}\right) + \beta\left(\vec{B} \times \vec{C}\right) \ . \tag{4}$$

2 Punkte

b) Zeigen Sie, dass das Kreuzprodukt antikommutiert. D.h. es gilt

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A} \ . \tag{5}$$

2 Punkte

c) Beweisen Sie die Graßmann'sche Identität:

$$\vec{A} \times \left(\vec{B} \times \vec{C}\right) = \vec{B}\left(\vec{A} \cdot \vec{C}\right) - \vec{C}\left(\vec{A} \cdot \vec{B}\right) \ . \tag{6}$$

2 Punkte

d) **Bonus**: Beweisen Sie die Jacobi Identität:

$$\vec{A} \times \left(\vec{B} \times \vec{C}\right) + \vec{B} \times \left(\vec{C} \times \vec{A}\right) + \vec{C} \times \left(\vec{A} \times \vec{B}\right) = 0 \ . \tag{7}$$

2 Bonuspunkte

e) **Bonus**: Beweisen Sie die Lagrange'sche Identität

$$\left(\vec{A} \times \vec{B}\right) \cdot \left(\vec{C} \times \vec{D}\right) = \left(\vec{A} \cdot \vec{C}\right)\left(\vec{B} \cdot \vec{D}\right) - \left(\vec{A} \cdot \vec{D}\right)\left(\vec{B} \cdot \vec{C}\right) \ . \tag{8}$$

2 Bonuspunkte

Aufgabe 2 **5 Punkte**

Der Vektor Operator $\vec{\nabla}$ ist in kartesischen Koordinaten mit den Basisvektoren $\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$ durch

$$\vec{\nabla} = \hat{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \tag{9}$$

gegeben. Damit definieren wir die Differentialoperationen:

- Gradient $\vec{\nabla}\Phi = \mathrm{grad}\Phi$,
- Divergenz $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \mathrm{div}\vec{V}$,
- Rotation $\vec{\nabla} \times \vec{V} = \mathrm{rot}\vec{V}$.

Hierbei ist $\Phi = \Phi(x, y, z)$ ein differenzierbares Skalarfeld und $\vec{V} = \vec{V}(x, y, z)$ ein differenzierbares Vektorfeld.

a) Beweisen Sie die Relation:

$$\mathrm{div}\left(\Phi\vec{V}\right) = \Phi\mathrm{div}\vec{V} + \vec{V} \cdot \mathrm{grad}\Phi \ . \tag{10}$$

1 Punkt

b) Beweisen Sie die Relation:

$$\mathrm{div}\left(\vec{V} \times \vec{W}\right) = \vec{W} \cdot \mathrm{rot}\vec{V} - \vec{V} \cdot \mathrm{rot}\vec{W} \ , \tag{11}$$

1 Punkt

c) Beweisen Sie die Relation:

$$\mathrm{rot}\left(\Phi\vec{V}\right) = \Phi\left(\mathrm{rot}\vec{V}\right) - \vec{V} \times \mathrm{grad}\Phi \ , \tag{12}$$

1 Punkt

d) Beweisen Sie die Relation:

$$\mathrm{rot}\left(\vec{V} \times \vec{W}\right) = \left(\vec{W} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{V} - \vec{W}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}\right) + \vec{V}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{W}\right) - \left(\vec{V} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{W} \ , \tag{13}$$

1 Punkt

e) Beweisen Sie die Relation:

$$\mathrm{rot}\ \mathrm{grad}\Phi = 0 \ . \tag{14}$$

1 Punkt

Aufgabe 3 **9 Punkte**

Wir berechnen den Gradient eines Skalarfeldes Φ in den Kugelkoordinaten r, φ, ϑ. Beachten Sie, dass die Koordinaten x, y, z in Kugelkoordinaten durch

$$x = r\cos\varphi\sin\vartheta, \tag{15}$$
$$y = r\sin\varphi\sin\vartheta, \tag{16}$$
$$z = r\cos\vartheta \ , \tag{17}$$

gegeben sind, wobei $r \geq 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ und $0 \leq \vartheta < \pi$.

a) Berchnen Sie die Einheitsvektoren $\hat{e}_r, \hat{e}_\varphi, \hat{e}_\vartheta$ in Abhänigkeit der kartesischen Einheisvektoren $\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$. Berechnen Sie hierzu zunächst

$$\vec{v}_t = \frac{\partial x}{\partial t}\hat{e}_x + \frac{\partial y}{\partial t}\hat{e}_y + \frac{\partial z}{\partial t}\hat{e}_z \ , \tag{18}$$

mit $t = r, \varphi, \vartheta$ und normieren Sie dann $\vec{v}_t$, um die Einheitssvektoren $\hat{e}_t$ zu erhalten

$$\hat{e}_t = \frac{\vec{v}_t}{|\vec{v}_t|} \ . \tag{19}$$

1 Punkt

b) Zeigen Sie mit Ihrem Ergebnis aus a), dass $\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$ wie folgt geschrieben werden können

$$\hat{e}_x = \hat{e}_r \cos\varphi \sin\vartheta + \hat{e}_\vartheta \cos\varphi \cos\vartheta - \hat{e}_\varphi \sin\varphi \ , \tag{20}$$
$$\hat{e}_y = \hat{e}_r \sin\varphi \sin\vartheta + \hat{e}_\vartheta \sin\varphi \cos\vartheta + \hat{e}_\varphi \cos\varphi \ , \tag{21}$$
$$\hat{e}_z = \hat{e}_r \cos\vartheta - \hat{e}_\vartheta \sin\vartheta \ . \tag{22}$$

3 Punkte

In den Koordinaten x, y, z ist

$$\mathrm{grad}\Phi = \hat{e}_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \hat{e}_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \hat{e}_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} \ . \tag{23}$$

c) Zeigen Sie, dass $\partial\Phi/\partial x$, $\partial\Phi/\partial y$ und $\partial\Phi/\partial z$ in Abhängigkeit von $\partial\Phi/\partial r$, $\partial\Phi/\partial\varphi$, $\partial\Phi/\partial\vartheta$ geschrieben werden können als

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial r}\cos\varphi\sin\vartheta + \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta}\frac{\cos\varphi\cos\vartheta}{r} - \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\frac{\sin\varphi}{r\sin\vartheta} \ , \tag{24}$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial r}\sin\varphi\sin\vartheta + \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta}\frac{\sin\varphi\cos\vartheta}{r} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\frac{\cos\varphi}{r\sin\vartheta} \ , \tag{25}$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \Phi}{\partial r}\cos\vartheta - \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta}\frac{\sin\vartheta}{r} \ . \tag{26}$$

Berechnen Sie hierzu zunächst

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} \tag{27}$$

für $t = r, \varphi, \vartheta$ und lösen Sie die resultierenden Gleichungen nach $\partial\Phi/\partial x$, $\partial\Phi/\partial y$ und $\partial\Phi/\partial z$ auf.

3 Punkte

d) Benutzen Sie Ihr Ergebnis aus Aufgabenteil b) und c) in Gleichung (22), um zu zeigen, dass in Kugelkoordinaten gilt

$$\mathrm{grad}\Phi = \hat{e}_r \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \hat{e}_\vartheta \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} + \hat{e}_\varphi \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \ . \tag{28}$$

2 Punkte

Bitte schreiben Sie auf die erste Seite des Übungsblattes Ihren Namen, Matrikelnummer und die Nummer ihres Tutoriums.