Klassische Theoretische Physik III
Elektrodynamik WS 18/19

Institut für Kernphysik, KIT

Prof. T. Schwetz-Mangold, Dr. O. Fischer, A. Pargner

3. Übung Besprechung: 07.11.18

Aufgabe 4 6 Punkte

Die Dirac Delta Distribution $\delta(x)$ ordnet jeder stetigen, beliebig oft differenzierbaren Funktion f den Wert $f(0)$ zu. Sie ist definiert über folgende Eigenschaft:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0)\,. \tag{1}$$

a) Zeigen Sie folgende Relationen:

$$\delta(kx) = \frac{1}{|k|}\delta(x) \text{ mit } k \in \mathbb{R}\ , \tag{2}$$

$$\delta(h(x)) = \frac{1}{|h'(x_0)|}\delta(x - x_0)\ , \tag{3}$$

wobei $h(x)$ eine reelwertige, differenzierbare Funktion mit einer Nullstelle x_0 ist. Weiter sei $h'(x = x_0) \neq 0$.

Hinweis: Entwickeln Sie $h(x)$ in einer Taylor Reihe um $x = x_0$.

2 Punkte

b) Verallgemeinern Sie das Ergebnis aus b) für Funktionen $h(x)$ mit beliebig vielen, einfachen Nullstellen x_i. Weiterhin gilt für alle i, $h'(x = x_i) \neq 0$.

2 Punkte

c) Zeigen Sie folgende Relation zwischen Dirac Delta Distribution und der Heavyside Theta Funktion:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\theta(x) = \delta(x)\ , \tag{4}$$

Es gilt:

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 \text{ für } x \geq 0 \\ 0 \text{ für } x < 0 \end{cases}\quad . \tag{5}$$

2 Punkte

Aufgabe 2 6 Punkte

Betrachten Sie eine gleichmäßig geladene, inifinitisimal dünne Kugeloberfläche mit Radius R und Ladung Q.

a) Bestimmen Sie die dazugehörige Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$. Machen Sie dazu den Ansatz

$$\rho(\vec{r}) = C \cdot \delta^{(3)}\left(|\vec{r}| - R\right) \tag{6}$$

und bestimmen Sie die Konstante C, in dem Sie $\int \rho(\vec{r}) \mathrm{d}^3\vec{r} = Q$ benutzen.

Hinweis: Die Lösung lautet

$$C = \frac{Q}{4\pi R^2}\ . \tag{7}$$

2 Punkte

b) Berechnen Sie die elektrische Feldstärke $\vec{E}(\vec{r})$ aus

$$\oint_f \vec{E}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{f} = 4\pi \int_{\mathcal{V}} \rho(\vec{r}) \mathrm{d}\mathcal{V}\ . \tag{8}$$

4 Punkte

Aufgabe 3 **8 Punkte + 4 Bonuspunkte**

Wir betrachten eine Punktladung q_1 im Ursprung unseres Koordinatensystems und eine zweite Punktladung $q_2 \ll q_1$ im Abstand r. Leiten Sie aus der Maxwell-Gleichung

$$\mathrm{div}\vec{E} = 4\pi\rho\,, \tag{9}$$

zusammen mit dem Satz von Gauß

$$\int_A \vec{E} d\vec{A} = \int_V \mathrm{div}\vec{E}\, dV' \tag{10}$$

das Coulomb'sche Gesetz her:

$$F_E = \frac{q_1 q_2}{r^2}\ . \tag{11}$$

Gehen Sie wie folgt vor:

a) Drücken Sie die Ladungsverteilung mit Delta-Funktionen aus.

1 Punkt

b) Integrieren Sie die rechte Seite von (10) über eine Kugel mit Radius r um den Ursprung.
Hinweis: Nutzen Sie die Maxwell-Gleichung (9).

2 Punkte

c) Integrieren Sie die linke Seite von (10).
Hinweis: Der Annahme $q_2 \ll q_1$ folgt, dass das el. Feld $\vec{E}$ um q_1 sphärisch symmetrisch ist.

2 Punkte

d) Schreiben Sie das Coulomb Gesetz unter Benutzung von $qE = F$.

1 Punkt

e) Warum gilt das Gesetz für alle Werte von q_2?

2 Punkte

f) Zeigen Sie, dass das Gesetz für alle Ladungsverteilungen gilt, die als eine Menge an Punktladungen q_i an den Orten $\vec{a}_i$ gegeben sind und folgende Bedingungen erfüllen:

$$\rho_1(\vec{r}) = \sum_i q_i \delta(\vec{r} - \vec{a}_i)\,, \tag{12}$$

$$\sum_i q_i = q_1\,, \tag{13}$$

$$|\vec{a}_i| \ll r\,. \tag{14}$$

4 Bonuspunkte

Bitte schreiben Sie auf die erste Seite des Übungsblattes Ihren Namen, Matrikelnummer und die Nummer ihres Tutoriums.