Klassische Theoretische Physik III
Elektrodynamik WS 18/19

Institut für Kernphysik, KIT

Prof. T. Schwetz-Mangold, Dr. O. Fischer, A. Pargner

5. Übung — Besprechung: 21.11.18

Aufgabe 1 — 6 Punkte

Betrachten Sie eine geerdete, leitende Hohlkugel mit Radius R. Vor der Kugel befinde sich eine Punktladung q am Ort $\vec{r}_1$. Das Koordinatensystem sei so gewählt, dass das Zentrum der Hohlkugel am Ursprung liegt und $\vec{r}_1 = r_1\hat{e}_z$ mit $r_1 > R$ gilt.

a) Zeigen Sie, dass das Potential $\Phi(\vec{r})$ außerhalb der Kugel ($|\vec{r}| > R$) gegeben ist durch

$$\Phi(\vec{r}) = q\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|} - \frac{R}{r_1}\frac{1}{|\vec{r}-(R^2/r_1^2)\vec{r}_1|}\right] . \tag{1}$$

2 Punkte

b) Zeigen Sie, dass das Potential in den Kugelkoordinaten $\vec{r} = (r, \varphi, \vartheta)$ als

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{q}{r_1}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{r^2}{r_1^2}-2\frac{r}{r_1}\cos\vartheta}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{r^2}{R^2}+\frac{R^2}{r_1^2}-2\frac{r}{r_1}\cos\vartheta}}\right) \tag{2}$$

geschrieben werden kann.

Hinweis: Um das Potential in Kugelkoordinaten auszudrücken, ist Aufgabe 4 auf dem ersten Übungsblatt hilfreich.

1 Punkt

c) Berechnen Sie mit Ihrem Ergebnis aus b) das elektrische Feld an der Kugeloberfläche.

Hinweis: Das Ergebnis lautet

$$\vec{E}(\vec{r}=\vec{R}) = -\frac{q}{R}\frac{r_1^2-R^2}{(r_1^2+R^2-2Rr_1\cos\vartheta)^{3/2}}\hat{e}_r , \tag{3}$$

wobei $\vec{R} = R\hat{e}_r$ ist.

2 Punkte

d) Berechnen Sie die induzierte Oberflächenladung und damit die Influenzladung Q_{infl} auf der Kugeloberfläche.

1 Punkt

Aufgabe 2 — 4 Punkte

Ein System zweier von einander isolierten Leitern mit entgegengesetzten Ladungen $Q_+ = Q$ und $Q_- = -Q$ nennt man Kondensator. Die Potentialdifferenz

$$\Phi_{Q_+}(\vec{l}_+) - \Phi_{Q_-}(\vec{l}_-) = -\int_{\vec{l}_-}^{\vec{l}_+} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = V \tag{4}$$

bestimmt die Spannung V. Hierbei bezeichnen wir mit $\vec{l}_{+,-}$ den Ort an dem sich der jeweilige Leiter befindet. Weiter definiert man die Kapazität C über den Quotient aus positiver Ladung und Spannung,

$$C = \frac{Q}{V} \ . \tag{5}$$

Die Kapazität hängt ausschließlich von der Geometrie des Systems ab.

a) Welche Einheit hat die Kapazität im Gauß-CGS Einheitensystem?

0.5 Punkte

b) Betrachten Sie zwei große leitende Platten mit der Fläche A. Diese seien durch einen kleinen Abstand d von einander getrennt und tragen die Ladungen Q und $-Q$. Solch eine Anordnung bezeichnet man als Plattenkondensator. Begründen Sie, dass die Spannung durch

$$V = Ed \tag{6}$$

gegeben ist. Dabei ist E das elektrische Feld zwischen den Platten.

Hinweis: Wählen Sie das Koordinatensystem so, dass die positiv geladene Platte bei $z = 0$ und die negativ geladene Platte bei $z = d$ liegt. Benutzen Sie Ihre Erkenntnisse vom 4. Übungsblatt.

1 Punkt

c) Zeigen Sie mit Hilfe des Satz von Gauß, dass das elektrische Feld zwischen den Platten gegeben ist durch

$$E = 4\pi \frac{Q}{A} \ . \tag{7}$$

2 Punkte

d) Bestimmen Sie die Kapazität C des Plattenkondensators.

0.5 Punkte

Aufgabe 3 — 4 Punkte

Wir beschäftigen uns im Folgenden mit einigen Eigenschaften der Legendre-Polynome $P_n(x)$, welche Sie in der Vorlesung als Lösungen der Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_n(x)\right] + n(n+1)P_n(x) = 0 \tag{8}$$

kennen gelernt haben. Dabei ist $n \in \mathbb{N}_0$. Weiterhin benötigen Sie die Rodrigues-Formel:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[\left(x^2-1\right)^n\right] \ . \tag{9}$$

a) Zeigen Sie die Orthogonalität der Legendre-Polynome,

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\mathrm{d}x = 0 \text{ für } n \neq m \ . \tag{10}$$

Benutzen Sie dazu die Rodrigues-Formel und partielle Integration.

Hinweis: Beachten Sie, dass Sie ohne Beschränkung der Allgemeinheit $m < n$ wählen können.

2 Punkte

b) Zeigen Sie, dass

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_n(x)dx = \frac{2}{2n+1} \tag{11}$$

gilt.

Hinweis: Sie können ohne Beweis verwenden, dass folgende Gleichung gilt:

$$\int_{-1}^{1} (x^2-1)^n \mathrm{d}x = (-1)^n \frac{(n!)^2 2^{1+2n}}{(2n+1)!} \tag{12}$$

2 Punkte

Aufgabe 4 **6 Punkte**

Betrachten Sie einen homogen geladenen Kreisring mit Radius R und Ladung q. Der Ring sei parallel zu x-y-Ebene ausgerichtet und sein Mittelpunkt befinde sich am Ort $(0, 0, b)$.

a) Geben Sie die Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ des Kreissrings in Zylinderkoordinaten (ϱ, φ, z) an.

1 Punkt

b) Bestimmen Sie das Potential $\Phi(\vec{r})$ für einen Punkt auf der z-Achse $\vec{r} = r\hat{e}_z$. Benutzen Sie dazu

$$\Phi(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\mathrm{d}^3r' \tag{13}$$

und Ihr Ergebnis aus a). Drücken Sie $\Phi(\vec{r} = r\hat{e}_z)$ durch den Winkel α und Abstand r_0 aus. Diese sind definiert durch

$$\cos\alpha = \frac{b}{r_0} \ , \tag{14}$$

$$r_0 = \sqrt{R^2+b^2} \ . \tag{15}$$

Hinweis: Das Ergebnis lautet

$$\Phi(\vec{r} = r\hat{e}_z) = \frac{q}{\sqrt{r^2+r_0^2-2rr_0\cos\alpha}} \ . \tag{16}$$

2 Punkte

c) Zeigen Sie, dass Ihr Ergebnis aus b) geschrieben werden kann als

$$\Phi(\vec{r} = r\hat{e}_z) = q\sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(\cos\alpha) \ . \tag{17}$$

Dabei ist $r_> \equiv \max(r, r_0)$ und $r_< \equiv \min(r, r_0)$.

Hinweis: Benutzen Sie, dass

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)z^l \tag{18}$$

gilt, falls $|z| < 1$. Wir nennen $F(x, z) = \sqrt{1-2xz+z^2}$ die erzeugende Funktion der Legendre-Polynome $P_l(x)$.

2 Punkte

d) Argumentieren Sie, dass das allgemeine Potential $\Phi(\vec{r})$ für beliebige Punkte $\vec{r} = (r, \vartheta, \varphi)$ durch

$$\Phi(\vec{r}) = q\sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(\cos\alpha)P_l(\cos\vartheta) \tag{19}$$

gegeben ist.

1 Punkt