Klassische Theoretische Physik III
Elektrodynamik WS 18/19

Institut für Kernphysik, KIT

Prof. T. Schwetz-Mangold, Dr. O. Fischer, A. Pargner

6. Übung — Besprechung: 28.11.18

Aufgabe 1 — 6 Punkte

Betrachten Sie folgende Ladungskonfiguration: Eine Ladung $Q_1 = q$ befinde sich am Punkt $x = l/2$, $y = 0$. Eine weitere Ladung $Q_2 = -q$ befinde sich bei $x = -l/2$, $y = 0$. Im Folgenden berechnen wir das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ dieses Dipols für große Entfernungen, $|\vec{r}| \gg l$.

a) Zeigen Sie mittels des Superpositionsprinzips, dass das elektrische Potenzial $\Phi(\vec{x})$ an einem beliebigen Punkt $\vec{x} = (x, y)$ durch folgenden Ausruck gegeben ist:

$$\Phi(\vec{x}) = q \left[\frac{1}{\sqrt{(x - l/2)^2 + y^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x + l/2)^2 + y^2}} \right] . \tag{1}$$

1 Punkt

b) Berechnen Sie nun das elektrische Potenzial in großer Entfernung, $|\vec{x}| \gg l$. Das heißt, bestimmen Sie $\Phi(\vec{x})$ in führender Ordnung in l/x.

Hinweis 1: Machen Sie dazu eine Taylor-Entwicklung von $\Phi(\vec{x})$ aus Gl. (1) in $\zeta \equiv l/x$ um $\zeta = 0$. Eine Entwicklung bis zur ersten Ordnung in ζ ist ausreichend.

Hinweis 2: Das Ergebnis lautet

$$\Phi(\vec{x}) = q \frac{lx}{(x^2 + y^2)^{3/2}} . \tag{2}$$

3 Punkte

c) Zeigen Sie, dass in Polarkoordinaten $\vec{r} = (r, \vartheta)$ das Potenzial aus b) geschrieben werden kann als

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{p \cos \vartheta}{r^2} . \tag{3}$$

Hierbei ist $ql = p = |\vec{p}|$ der Betrag des Dipolmoments.

1 Punkt

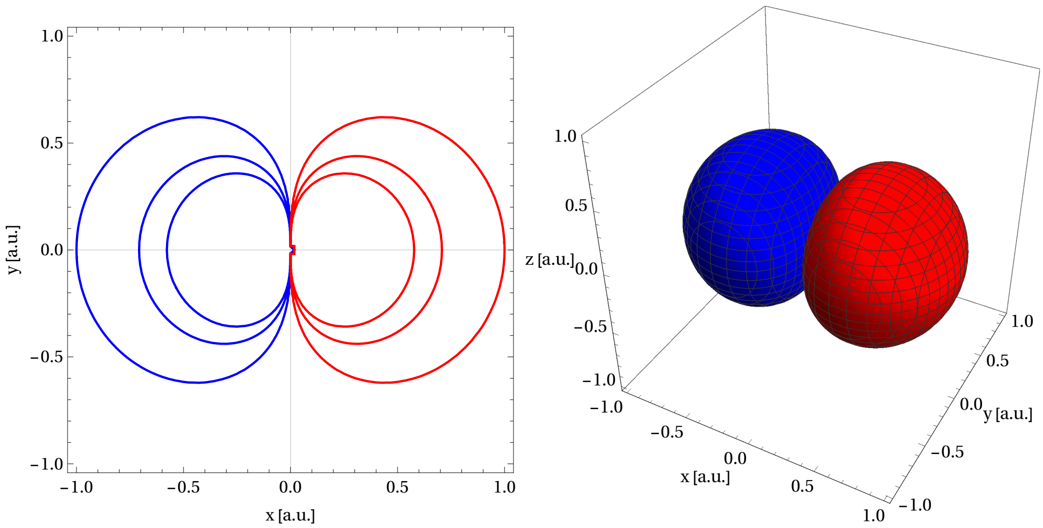
d) Bestimmen Sie mit Ihrem Ergebnis aus c) das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem elektrischen Feld eines Monopols, also einer isolierten Punktladung.

Hinweis: In Polarkoordinaten gilt

$$\mathrm{grad}\Phi(\vec{r}) = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \hat{e}_\vartheta . \tag{4}$$

1 Punkt

Hinweis: Für eine Ladungskonfiguration aus zwei Punktladungen $Q_{1,2} = \pm q$ kann immer ein kartesisches Koordinatensystem (x, y, z) so gewählt werden, dass sich das Problem auf zwei Dimensionen (x, y) reduzieren lässt. Wählt man das Koordinatensystem so wie in der Aufgabenstellung gegeben, beobachtet man, dass die Ladungskonfiguration in drei Dimensionen rotationssymmetrisch um die x-Achse ist. Diese Symmetrie gilt auch für das Potenzial $\Phi(\vec{x})$ (Siehe Abb. 1).



(a) (b)

Abbildung 1: Äquipotenziallinien $\Phi(\vec{x})$ für das Dipolfeld in 2 Dimensionen (a) und 3 Dimensionen (b). Mit blau kennzeichnen wir $\Phi(\vec{x}) < 0$, mit rot $\Phi(\vec{x}) > 0$.

Aufgabe 2 — 4 Punkte

Betrachten Sie folgende einfache Ladungskonfiguration: Die Ladung $Q_1 = -q$ am Punkt $(x, y, z) = (0, 0, a)$, eine zweite Ladung $Q_2 = -q$ bei $r = (0, 0, -a)$ und eine dritte Ladung $Q_3 = 2q$ im Ursprung $r = (0, 0, 0)$. Schreiben sie zunächst die zugehörige Ladungsdichte auf.

a) Geben sie die Ladungsverteilung an.

1 Punkt

b) Zeigen Sie, dass das Dipolmoment verschwindet.

1 Punkt

c) Zeigen Sie, dass für das Quadrupolmoment gilt:

$$Q^{33} = -\frac{4}{3}\, q\, a^2 \,. \tag{5}$$

2 Punkte

Aufgabe 3 — 7 Punkte

Im Folgenden lösen wir die Laplace-Gleichung in Zylinderkoordinaten (ϱ, φ, z) unter der Vorraussetzung, dass das Potenzial Φ nicht von z abhängt.

a) Zeigen Sie mittels des Separationsansatzes $\Phi(\varrho, \varphi) = R(\varrho)F(\varphi)$, dass die Laplace-Gleichung zu folgenden Differentialgleichungen für $R(\varrho)$ und $F(\varphi)$ führt:

$$\frac{\varrho}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varrho}\left(\varrho\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\varrho}\right) = C_1 \,, \tag{6}$$

$$\frac{1}{F}\frac{\mathrm{d}^2 F}{\mathrm{d}\varphi^2} = C_2 \,. \tag{7}$$

Wobei $C_{1,2}$ reelle Konstanten sind, für die gilt

$$C_1 + C_2 = 0 \ . \tag{8}$$

2 Punkte

b) Argumentieren Sie zunächst, dass $C_2 \leq 0$ gelten muss. Wählen Sie $C_2 = -k^2$ mit $k^2 \geq 0$. Finden Sie die allgemeine Lösung für Gl. (7), zunächst für den Fall $k^2 \neq 0$. Welche Werte kann k annehmen?

Hinweis: Beachten Sie, dass $F(\varphi)$ eine periodische Funktion sein muss.

2 Punkte

c) Finden Sie für den Fall $k^2 \neq 0$ die Lösungen für Gl. (6). Machen Sie dazu einen Potenzansatz für $R(\varrho)$.

1 Punkt

d) Finden Sie für den speziellen Fall $k^2 = 0$ die Lösungen für Gl. (6) und (7). Zeigen Sie damit und mit Ihren Ergebnissen aus den vorigen Aufgabenteilen, dass die allgemeine Lösung durch

$$\Phi(\varrho, \varphi) = a_0 + b_0 \log \varrho + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\varrho^k \left(a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi \right) + \varrho^{-k} \left(c_k \cos k\varphi + d_k \sin k\varphi \right) \right] \ . \tag{9}$$

gegeben ist. Dabei sind $a_0, b_0, a_k, b_k, c_k, d_k \in \mathbb{R}$ Konstanten, welche durch die Randbedingungen bestimmt werden.

2 Punkte

Aufgabe 4 — 3 Punkte + 2 Bonuspunkte

Eine Kugel mit konstanter Ladung besitzt ausschließlich ein Monopolmoment. Im Folgenden betrachten wir eine deformierte geladene Kugel, ein Ellipsoid.

a) Geben Sie die Gleichung an, welche die Oberfläche eines Ellipsoids mit den Halbachsen $a_1 = a_2 = 1$ und $a_3 = a$ bestimmt. Die dritte Halbachse ist damit ein freier Parameter und gibt an, wie stark das Ellipsoid von der Kugelsymmetrie abweicht.

1 Punkt

b) Berechnen Sie das Dipolmoment des Ellipsoids. Die Ladungsdichte ρ_0 innerhalb des Ellipsoids ist konstant.

Hinweis: Sie sollten finden, dass das Dipolmoment verschwindet.

2 Punkte

c) *Bonusaufgabe:* Berechnen Sie das Quadrupolmoment des Ellipsoids. Vergewissern Sie sich, dass dieses für den Fall $a = 1$, wie erwartet, verschwindet.

2 Bonuspunkte