Klassische Theoretische Physik III
Elektrodynamik WS 18/19

Institut für Kernphysik, KIT

Prof. T. Schwetz-Mangold, Dr. O. Fischer, A. Pargner

7. Übung   Besprechung: 5.12.18

Aufgabe 1   7 Punkte + 2 Bonuspunkte

Betrachten Sie die Ladungsverteilung in Abb. 1: Puntkladungen mit $Q = +q$ befinden sich jeweils an den Orten $x = a, y = 0, z = 0$ und $x = 0, y = a, z = 0$. Punktladungen mit $Q = -q$ befinden sich jeweils an den Orten $x = -a, y = 0, z = 0$ und $x = 0, y = -a, z = 0$.

a) *Bonusaufgabe:* Geben Sie zunächst die Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ dieser Verteilung mit Hilfe von Delta-Funktionen in den kartesischen Koordinaten $x,\ y,\ z$ an. Drücken Sie dann $x,\ y,\ z$ durch die Kugelkoordinaten $r,\ \phi,\ \theta$ aus und benutzen Sie bekannte Rechenregeln für die Delta-Funktion, um zu zeigen, dass die Ladungsdichte in diesen Koordinaten durch

$$\rho(\vec{r}) = \frac{q}{a^2}\delta(r-a)\delta(\cos\theta)\left[\delta(\phi) + \delta(\phi - \frac{\pi}{2}) - \delta(\phi - \pi) - \delta(\phi - \frac{3\pi}{2})\right] \tag{1}$$

ausgedrückt werden kann.

2 Bonuspunkte

b) Berechnen Sie für diese Ladungsverteilung die sphärischen Multipolmomente q_{lm} in Abhängigkeit von l und m. Die sphärischen Multipolmomente q_{lm} lassen sich durch

$$q_{lm} = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int \mathrm{d}^3r' \rho(\vec{r}\,') r'^l Y^*_{lm}(\theta', \phi') \tag{2}$$

bestimmen. Hierbei ist $l = 0, 1, 2, \ldots$, $m = -l, -l+1, \ldots, l-1, l$ und

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta) \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi} \tag{3}$$

sind die Kugelflächenfunktionen.

3 Punkte

c) Geben Sie die Momente für $l = 0$ und $l = 1$ explizit an. Drücken Sie diese auch in kartesischen Koordinaten aus.
Hinweis: Für die zugeordenten Legendre-Polynome gilt:

$$P_1^0(0) = 0,\ P_1^1(0) = -1,\ P_1^{-1}(0) = \frac{1}{2}\ . \tag{4}$$

2 Punkte

d) Bestimmen Sie so das Dipolmoment $\vec{p}$ dieser Ladungsverteilung in Abhängigkeit von q und a.

1 Punkt

e) Skizzieren Sie die Ladungsverteilung und zeichnen Sie die Richtung des Dipolmomentes in Ihre Skizze.

1 Punkt

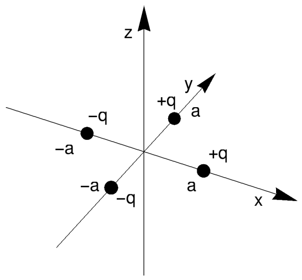

Abbildung 1

Aufgabe 2 **8 Punkte**

Betrachten Sie einen unendlich langen Hohlzylinder mit Innenradius R_1 und Außenradius $R_2 > R_1$, welcher homogen vom Strom I durchflossen wird.

a) Wählen Sie geeignete Koordinaten (ϱ, φ, z) und geben Sie das Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r})$ in Abhängigkeit vom im Zylinder fließenden Strom an. Argumentieren Sie, dass $\vec{A}(\vec{r})$ aus Symmetriegründen in z-Richung zeigt und nur von ϱ abhängen kann.

2 Punkte

b) Bestimmen Sie nun die Richtung des magnetischen Feldes und zeigen Sie, dass es ausschließlich von ϱ abhängt.

2 Punkte

c) Benutzen Sie den Satz von Stokes und die Maxwell-Gleichungen, um das magnetische Feld explizit anzugeben. Skizzieren Sie Ihr Ergebnis. Warum verschwindet das Magnetfeld im Hohlraum des Leiters?

4 Punkte

Aufgabe 3 **5 Punkte**

Betrachten Sie einen leitenden, geraden Draht D_1, welcher vom Strom I_1 durchflossen wird.

a) Geben Sie die Stromdichte $\vec{j}_1(\vec{r})$ in Zylinder-Koordinaten an.

1 Punkt

b) Berechnen Sie das Magnetfeld $\vec{B}_1$ (Richtung und Betrag!) des Drahtes D_1 nach dem Biot-Savart-Gesetz.
Hinweis: Aufgrund der Symmetrie reicht es das Feld in der Ebene mit $z = 0$ zu bestimmen.

1 Punkt

c) Betrachten Sie nun einen zweiten Draht D_2, durchflossen vom Strom I_2, im Abstand d und parallel zu D_1. Geben Sie die Kraft an, die vom Magnetfeld $\vec{B}_2$ auf das Wegelement $d\vec{\ell}$ in D_1 wirkt. Verwenden Sie hierzu die Definition:

$$d\vec{F}(\vec{r}) = \frac{I}{c} d\vec{\ell} \times \vec{B}(\vec{r}) \tag{5}$$

1 Punkt

d) Warum wirkt innerhalb eines Leiters keine Kraft vom Strom im Wegelement $d\vec{\ell}'$ auf das Wegelement $d\vec{\ell}$ im selben Leiter?

1 Punkt

e) Wann ist die Kraft zwischen den beiden Drähten von Aufgabenteil c) abstossend, wann ist sie anziehend?

1 Punkt

Bitte schreiben Sie auf die erste Seite des Übungsblattes Ihre Namen, Matrikelnummer und die Nummer Ihres Tutoriums.