Klassische Theoretische Physik III
Elektrodynamik WS 18/19

Institut für Kernphysik, KIT

Prof. T. Schwetz-Mangold, Dr. O. Fischer, A. Pargner

8. Übung — Besprechung: 19.12.18

Aufgabe 1 — 7 Punkte

Zwei monochromatische Wellen mit identischer Frequenz und entgegengesetzt zirkularer Polarisation propagieren mit gleicher Geschwindigkeit in die z-Richtung. In dieser Aufgabe bestimmen wir die effektive Polarisation als Funktion der relativen Amplituden der beiden Wellen.

a) Das elektrische und das magnetische Feld einer monochromatischen Welle ist durch

$$\vec{E} = \mathrm{Re}\vec{\epsilon}(\vec{r},t), \qquad \vec{\epsilon} = \vec{\epsilon}_0 e^{i(\vec{r}\cdot\vec{k}-\omega t)}$$
$$\vec{B} = \mathrm{Re}\vec{\beta}(\vec{r},t), \qquad \vec{\beta} = \vec{\beta}_0 e^{i(\vec{r}\cdot\vec{k}-\omega t)}$$

gegeben. Die Maxwell-Gleichungen geben eine bestimmte Beziehung zwischen $\vec{k}$, $\vec{E}$ und $\vec{B}$ vor. Geben Sie diese Beziehungen an.

1 Punkt

b) Führen Sie nun die drei orthogonalen Vektoren $\vec{u}$, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ ein und schreiben Sie

$$\vec{\epsilon}(\vec{r},t) = (E_1\vec{\epsilon_1} + E_2\vec{\epsilon_2})\, e^{i(\vec{r}\cdot\vec{k}-\omega t)} \;,$$
$$\vec{\beta}(\vec{r},t) = \vec{u}\times\vec{\epsilon}(\vec{r},t) \;.$$

Dabei sind E_1 und E_2 beliebige komplexe Zahlen. Drücken Sie diese durch ihre Amplituden und Phase aus und bestimmen Sie beiden mögliche Polarisationen (linear und zirkular) entsprechend der Phasendifferenz und der relativen Amplitude zwischen E_1 und E_2. Bestimmen Sie auch in welchem Fall die Polarisation links- oder rechtshändig ist. *Anmerkung:* Die Linearkombination von linearer und zirkularer Polarisation nennt man elliptisch.

3 Punkte

c) Geben Sie nun die Ausdrücke für die beiden Wellen mit den in der Aufgabenstellung spezifizierten Eigenschaften an. Schreiben Sie die effektive Welle als lineare Superposition der zwei einzelnen Wellen. Argumentieren Sie, warum die lineare Superposition immer noch eine Lösung der Bewegungsleichung ist. Bezeichnen Sie die Amplitude der einzelnen Wellen mit A und B. Betrachten Sie die effektive Lösung für die Fälle

$$A = B, \quad A = -B, \qquad A = 0,$$
$$B = 0, \quad |A| > |B|, \quad |A| < |B| .$$

und bestimmen Sie die Polarisation und ihre Richtung. Beachten Sie, dass das Ergebnis davon abhängig ist welche Polarisation A und B haben.

3 Punkte

Aufgabe 2 **7 Punkte**

In dieser Aufgabe zeigen wir, dass in einem Hohlleiter keine transversalelektromagnetischen (TEM) Wellen entstehen können. Wir betrachten dazu einen Hohlleiter, welcher in x- und y-Richtung auf die Länge L_x bzw. L_y durch Metallplatten begrenzt und in z-Richtung unbegrenzt sei. Das $\vec{E}$-Feld einer in z-Richtung propagierenden Welle ist gegeben durch:

$$E_x = C_x \cos\frac{l\pi x}{L_x} \sin\frac{m\pi y}{L_y} e^{\imath(kz-\omega t)} , \tag{1}$$

$$E_y = C_y \sin\frac{l\pi x}{L_x} \cos\frac{m\pi y}{L_y} e^{\imath(kz-\omega t)} , \tag{2}$$

$$E_z = C_z \sin\frac{l\pi x}{L_x} \sin\frac{m\pi y}{L_y} e^{\imath(kz-\omega t)} . \tag{3}$$

Hierbei ist $l, m = 0, 1, 2, \ldots$ mit der üblichen Einschränkung, dass jeweils nur $l = 0$ oder $m = 0$ sein darf. Die Kreisfrequenz der Welle wird als ω bezeichnet und ist wie folgt definiert:

$$\omega^2 = c^2 \left(\frac{l^2\pi^2}{L_x^2} + \frac{m^2\pi^2}{L_y^2} + k^2 \right) \tag{4}$$

a) Bestimmen Sie zunächst die minimale Frequenz ω_{min} mit der sich Wellen in einem solchen Leiter ausbreiten können für $m \neq 0 \neq l$ und für $l = 0 \neq m$. Welche Ausmaße muss ein Hochpassfilter mit quadratischer Schnittfläche ($L_x = L_y$) mindestens haben, um Frequenzen unterhalb von $f = 30$ GHz zu filtern?

2 Punkte

b) Machen Sie für das magnetische Feld einen Ansatz $\vec{B}(\vec{x}, t) = \vec{B}(\vec{x}) \exp(-\imath\omega t)$ und zeigen Sie, dass aus den Maxwell-Gleichungen folgt:

$$\vec{B} = -\frac{\imath c}{\omega} \text{rot} \vec{E} \tag{5}$$

2 Punkte

c) Zeigen Sie, dass aus $E_z = B_z = 0$, $\vec{E} = \vec{B} = 0$ folgt, d.h. in diesem Wellenleiter gibt es keine TEM Wellen.

Hinweis: Überlegen Sie sich, was für C_z, l bzw. m gelten muss, damit $E_z = 0$ ist. Benutzen Sie diese Bedingungen zusammen mit $B_z = 0$, um zu zeigen, dass daraus $\vec{E} = \vec{B} = 0$ folgt.

3 Punkte

Aufgabe 3 **6 Punkte**

Eine unendlich dünne Christbaumkugel mit Mittelpunkt im Koordinatenursprung und Radius R trage eine gleichmässig auf der Oberfläche verteilte Ladung Q und rotiere mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um die z Achse.

a) Bestimmen sie die durch die Christbaumkugel erzeugte Stromdichte.

3 Punkte

b) Bestimmen sie das zugehörige magnetische Dipolmoment der Christbaumkugel.

3 Punkte

Hinweise zum Übungsbetrieb

Die online Anmeldung zur Vorleistung ist freigeschaltet. Bitte melden sie sich zeitnah an.