Klassische Theoretische Physik III
Elektrodynamik WS 18/19

Institut für Kernphysik, KIT

Prof. T. Schwetz-Mangold, Dr. O. Fischer, A. Pargner

9. Übung — Besprechung: 09.01.19

Aufgabe 1 — 3 Punkte

Berechnen Sie die Fourier-Transformation der folgenden Funktionen

$$f(\vec{x}) = a\,\delta^3(\vec{x})\,, \tag{1}$$
$$g(x) = a\,\theta(x_0 - |x|)\,. \tag{2}$$

Berechnen Sie ausserdem die charakteristische Länge der Fourier-Transformierten g_k, welche durch die erste Nullstelle k_0 gegeben ist und diskutieren Sie den Grenzfall für $x_0 \to \infty$.

Aufgabe 2 — 4 Punkte

Die Poisson Gleichung ist gegeben mit

$$\Delta\phi(\vec{r}) = -4\pi\rho(\vec{r})\,. \tag{3}$$

Indem wir das Potential ϕ und die Ladungsdichte ρ Fourier-transformieren erhalten wir

$$\vec{k}^2\phi_{\vec{k}} = 4\pi\rho_{\vec{k}}\,. \tag{4}$$

Nutzen Sie das Ergebnis aus Gleichung (4) für $\phi_{\vec{k}}$ und zeigen Sie durch eine Rücktransformation, dass folgendes gilt:

$$\phi(\vec{r}) = \int d^3r'\,\frac{\rho(\vec{r}\,')}{|r - r'|}\,. \tag{5}$$

Aufgabe 3 — 3 Punkte

Die Lösung der homogenen Wellengleichung für jede einzelne Fourier-Mode, integriert über alle Moden können wie folgt ausgedrückt werden:

$$\phi(\vec{x}, t) = \mathrm{Re}\int d^3k A_{\vec{k}} e^{i(\vec{x}\cdot\vec{k} - \omega_k t)}\ .$$

Dabei ist $A_{\vec{k}}$ eine komplexe Funktion von $\vec{k}$. Zeigen Sie nun, dass

$$A_{\vec{k}} = \left(\phi_{\vec{k}} + \frac{i\dot{\phi}_{\vec{k}}}{\omega}\right)$$

gilt. Hierbei sind $\phi_{\vec{k}}$ und $\dot{\phi}_{\vec{k}}$ die Fourier-Transformierten von $\phi(\vec{x}, 0)$ und $\dot{\phi}(\vec{x}, 0)$.

Aufgabe 4 **10 Punkte**

In der Vorlesung haben Sie die Lienard-Wiechert-Potentiale für eine bewegte Punktladung q

$$\phi_{\text{ret}} = \frac{qc}{Rc - \vec{R}\cdot\vec{v}} \text{ und } \vec{A}_{\text{ret}} = \frac{\vec{v}}{c^2}\phi_{\text{ret}} \tag{6}$$

kennen gelernt. Dabei ist

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}\,'(t_{\text{r}}) \;, \tag{7}$$

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}\,'}{\mathrm{d}t_{\text{r}}} \;, \tag{8}$$

$$R = c\,(t - t_{\text{r}}) \;, \tag{9}$$

t_{r} ist die retardierte Zeit und c die Lichtgeschwindigkeit. Das durch die bewegte Ladung erzeugte elektrische Feld $\vec{E}$ an einem beliebigen Punkt $\vec{r}$ und zu einer beliebigen Zeit $t > t_{\text{r}}$ lässt sich aus den Potentialen nach

$$\vec{E}(t,\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi_{\text{ret}} - \partial_t\vec{A}_{\text{ret}} \tag{10}$$

bestimmen. Die Berechnung von $\vec{E}$ wird dadurch erschwert, dass die retardierte Zeit t_{r} von $\vec{r}$ und t abhängt. Nichtsdestotrotz berechnen wir in dieser Aufgabe $\vec{E}(t,\vec{r})$ für eine beliebig bewegte Punktladung q.

a) Beginnen Sie damit $\vec{\nabla}\phi_{\text{ret}}$ zu berechnen. Zeigen Sie zunächst, dass

$$\vec{\nabla}\phi_{\text{ret}} = \frac{qc}{\left(Rc - \vec{R}\cdot\vec{v}\right)^2}\left[c^2\vec{\nabla}t_{\text{r}} + \vec{v} + \left(\vec{R}\cdot\vec{a} - v^2\right)\vec{\nabla}t_{\text{r}}\right] \tag{11}$$

gilt. Dabei ist $\vec{a} = \mathrm{d}\vec{v}/\mathrm{d}t_{\text{r}}$ die Beschleunigung des Teilchens zur retardierten Zeit t_{r}. Benutzen Sie nun das Ergebnis aus der Vorlesung

$$\vec{\nabla}t_{\text{r}} = -\frac{\vec{R}}{Rc - \vec{R}\cdot\vec{v}} \;, \tag{12}$$

um zu zeigen, dass

$$\vec{\nabla}\phi_{\text{r}} = \frac{qc}{\left(Rc - \vec{R}\cdot\vec{v}\right)^3}\left[\left(Rc - \vec{R}\cdot\vec{v}\right)\vec{v} - \left(c^2 - v^2 + \vec{R}\cdot\vec{a}\right)\vec{R}\right] \tag{13}$$

gilt.

Hinweis: Ein nützlicher Zusammenhang ist

$$\vec{\nabla}\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right) = \left(\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{B} + \left(\vec{B}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{A} + \vec{A}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right) + \vec{B}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right) \;. \tag{14}$$

4 Punkte

b) Benutzen Sie nun

$$\frac{\partial t_{\text{r}}}{\partial t} = \frac{cR}{Rc - \vec{R}\cdot\vec{v}} \;, \tag{15}$$

um zu zeigen, dass

$$\partial_t\vec{A}_{\text{ret}} = \frac{qc}{\left(Rc - \vec{v}\cdot\vec{R}\right)^3}\left[\left(Rc - \vec{v}\cdot\vec{R}\right)\left(\frac{R}{c}\vec{a} - \vec{v}\right) + \frac{R}{c}\left(c^2 - v^2 + \vec{R}\cdot\vec{a}\right)\vec{v}\right] \tag{16}$$

gilt.

3 Punkte

c) Führen Sie nun den Vektor $\vec{u} = c\hat{R} - \vec{v}$ ein. Dabei ist $\hat{R} = \vec{R}/R$. Benutzen Sie diese Definition und ihre Ergebnisse aus den vorherigen Aufgabenteilen, um zu zeigen, dass das durch die bewegte Ladung q erzeugte elektrische Feld $\vec{E}$ als

$$\vec{E} = \frac{qR}{\left(\vec{R} \cdot \vec{u}\right)^3} \left[\left(c^2 - v^2\right) \vec{u} + \vec{R} \times (\vec{u} \times \vec{a}) \right] \ . \tag{17}$$

geschrieben werden kann.

2 Punkte

d) Betrachten Sie den Spezialfall einer gleichförmig bewegten Ladung, d.h. $\vec{a} = 0$. Benutzen Sie, dass ein Bezugsystem gewählt werden kann, in dem $\vec{v} = 0$ gilt. Berechnen Sie das Feld $\vec{E}$ in diesem Fall. Erkennen Sie das Ergebnis wieder?

1 Punkt

Bitte schreiben Sie auf die erste Seite des Übungsblattes Ihre Namen, Matrikelnummer und die Nummer Ihres Tutoriums.

Hinweis zum Übungsbetrieb:

Die online-Anmdeldung zur Vorleistung ist freigeschaltet. Bitte melden Sie sich zeitnah an.