# Klassische Theoretische Physik III
# Elektrodynamik WS 18/19

Institut für Kernphysik, KIT

Prof. T. Schwetz-Mangold, Dr. O. Fischer, A. Pargner

## 10. Übung — Besprechung: 16.01.19

### Aufgabe 1 — 4 Punkte

Im Folgenden vertiefen wir unser Verständnis des Poynting Vektors innerhalb eines Hohlleiters. Betrachten Sie hierfür das $\vec{E}$- und $\vec{B}$-Feld einer in $z$-Richtung propagierenden Welle:

$$\vec{E} = E \cdot \mathrm{Re}\left[ \begin{pmatrix} \cos(k_x x)\sin(k_y y) \\ \sin(k_x x)\cos(k_y y) \\ \sin(k_x x)\sin(k_y y) \end{pmatrix} \mathrm{e}^{i(k_z z - \omega t)} \right] \tag{1}$$

$$\vec{B} = \frac{E}{\omega} \cdot \mathrm{Re}\left[ i \begin{pmatrix} (k_y - ik_z)\cos(k_y y)\sin(k_x x) \\ (i\,k_z - k_x)\cos(k_x x)\sin(k_y y) \\ (k_x - k_y)\cos(k_x x)\cos(k_y y) \end{pmatrix} \mathrm{e}^{i(k_z z - \omega t)} \right] \tag{2}$$

mit festen Wellenzahlen $k_x, k_y, k_z \neq 0$.

a) Berechnen Sie den Poynting-Vektor: $\vec{S} = c(\vec{E} \times \vec{B})/(4\pi)$. In welche Richtung zeigt er im Allgemeinen?

*1 Punkt*

b) Wir nehmen an, dass der Hohlleiter rechteckig ist, das also $-a \leq x \leq a$ und $-b \leq y \leq b$ gilt. Die Intensität des longitudinalen (d.h. in $\vec{e}_z$ Richtung) Energieflusses bei $z = 0$ ist gegeben durch die Integration des Poynting-Vektors in der transversalen Ebene:

$$\vec{S}_t = \int_{-a}^{a} dx \int_{-b}^{b} dy\, \vec{S}(x, y, z = 0, t)\,. \tag{3}$$

Zeigen Sie, dass diese ausschliesslich in $\vec{e}_z$ Richtung zeigt.

*2 Punkte*

c) Berechnen Sie das zeitliche Mittel des Energieflusses:

$$\langle \vec{S}_t \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \vec{S}_t dt \tag{4}$$

*1 Punkt*

### Aufgabe 2 — 7 Punkte

In dieser Aufgabe beschäftigen wir uns mit der interessanten Frage nach magnetischen Monopolen. Wir beginnen damit, dass wir die Maxwell-Gleichungen zunächst in symmetrischer Form schreiben:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho_e, \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}_e\,,$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 4\pi\rho_m, \qquad -\vec{\nabla} \times \vec{E} = \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}_m\,.$$

a) Zeigen Sie, dass aus den symmetrischen Maxwell-Gleichungen folgende Erhaltungssätze folgen

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_e = 0, \qquad \frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_m = 0 \ .$$

*1 Punkt*

b) Zeigen Sie, dass die Maxwell-Gleichungen invariant unter der *dualen* Transformation

$$\vec{E}' = \vec{E} \cos\alpha + \vec{B} \sin\alpha \ , \qquad \vec{B}' = -\vec{E} \sin\alpha + \vec{B} \cos\alpha,$$

sind, falls die Ströme sich nach

$$\rho_e' = \rho_e \cos\alpha + \rho_m \sin\alpha, \qquad \vec{j}_e' = \vec{j}_e \cos\alpha + \vec{j}_m \sin\alpha,$$
$$\rho_m' = -\rho_e \sin\alpha + \rho_m \cos\alpha, \qquad \vec{j}_m' = -\vec{j}_e \sin\alpha + \vec{j}_m \cos\alpha,$$

transformieren.

*2 Punkte*

c) Die Maxwell-Gleichungen sind also unverändert unter der *dualen* Transformation. Das bedeutet wir haben die Freiheit zu entscheiden, was wir als magnetisch und was wir als elektrisch bezeichnen. Zeigen Sie, dass man mit einer geeigneten Wahl für den Winkel $\alpha$ immer $\rho_m' = \vec{j}_m' = 0$ wählen kann.

*1 Punkt*

d) Nehmen Sie nun an, dass es mehrere Quellen für das elektrische und magnetische Feld gibt, d.h. verschiedene Teilchenspezies. Leiten Sie eine Bedingung an die Ladung bzw. Ströme her, unter der die Transformation in b) weiterhin möglich ist.

*1 Punkt*

e) Geben Sie eine allgemeine Form der Lorentz-Kraft $\vec{F}_L$ an. Überprüfen Sie Ihre Aussage indem Sie zeigen, dass $\vec{F}_L$ invariant unter einer *dualen* Transformation ist.

*2 Punkt*

## Aufgabe 3 — 3 Punkte

Mit der Bedingung, dass die Maxwell-Gleichungen invariant unter Ladungskonjugation ($C$), Parität ($P$) und Zeitumkehr ($T$) sind, leiten wir in dieser Aufgabe die Tranformationseigenschaften des magnetischen und elektrischen Feldes unter $C$, $P$ und $T$ her. Unter $C$ Transformationen gilt, für die Ladung offensichtlich $q \to -q$ und entsprechend für die Stromdichte $\vec{j} \to -\vec{j}$. Unter $P$ gilt $\vec{x} \to -\vec{x}$ und unter $T$ gilt $t \to -t$. Die elektrische Ladung $q$ verhält sich unter $P$ und $T$ wie ein Skalar.

a) Berechenen Sie, wie sich zeitliche und räumliche Ableitungen unter $P$ und $T$ Transformationen verhalten. Welches Transformationsverhalten folgt daraus für die Divergenz und die Rotation unter $P$ und $T$?

*1 Punkt*

b) Betrachten Sie nun die Maxwell-Gleichungen jeweils unter $C$, $P$ und $T$ Transformationen. Wie müssen sich das elektrische und magnetische Feld jeweils transformieren, damit die Gleichungen invariant unter diesen Transformationen sind?

*1 Punkt*

c) Die allgemeine Form der Lorentz-Kraft $\vec{F}_\mathrm{L}$ ist gegeben durch

$$\vec{F}_\mathrm{L} = q_\mathrm{e}\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) + q_\mathrm{m}\left(\vec{B} - \vec{v} \times \vec{E}\right) \tag{5}$$

mit den magnetischen Ladungen $q_\mathrm{m}$ hergeleitet. Benutzen Sie ihr Ergebnis aus b) und betrachten Sie $\vec{F}_\mathrm{L}$ nach einer $P$ Transformation. Wie muss sich die magnetische Ladung transformieren, damit sich $\vec{F}_\mathrm{L}$ wie ein Vektor unter $P$ verhält?

*1 Punkt*

**Aufgabe 4** **6 Punkte**

In dieser Aufgabe betrachten wir den Unterschied zwischen den Strahlungsverlusten in einem Linearbeschleuniger und in einem Speicherring. Für relativistische Geschwindigkeiten gelten die folgende Formeln für die abgestrahlte Leistung $P$:

$$P = \frac{2q^2}{3m^2c^3}\left(\frac{d\vec{p}}{dt}\right)^2, \qquad (\vec{v} \parallel \dot{\vec{v}}) \tag{6}$$

$$P = \frac{2q^2}{3m^2c^3}\gamma^2\left(\frac{d\vec{p}}{dt}\right)^2, \qquad (\vec{v} \perp \dot{\vec{v}}) \tag{7}$$

Dabei ist $\gamma \equiv \sqrt{1 - v^2/c^2}$ und $\vec{p}$ ist der Impuls des geladenen Teilchens.

a) In einem Linearbeschleuniger werde ein Elektron auf einer Strecke von 3 km auf eine Energie von 50 GeV beschleunigt (hier ist GeV=Giga Elektronvolt, eine häufig gebrauchte Einheit in der Teilchenphysik). Berechnen Sie zunächst die Strecke $l$ nach der die Energie des Elektrons 0.5 MeV (=Mega Elektronvolt) beträgt. Beachten Sie, dass dies der Ruheenergie des Elektrons entspricht.

   *Hinweis*: Das Ergebnis lautet $l = 3$ cm.

   *2 Punkte*

b) Im hochrelativistischen Fall, d.h. wenn der Impuls des Teilchen größer als seine Ruheenergie ist, gilt $E = (m_e^2c^4 + c^2p^2)^{1/2} \approx cp$. Benutzen Sie diese Beziehung um $dp/dt$ und damit $\Delta E_{str} = Pl/c$ für $l$ aus a) zu berechnen.

   *Hinweis*: Benutzen Sie, dass $e^2/\mathring{A} = 14.4$ eV gilt, dabei ist $\mathring{A}$ die Längeneinheit Angström. Das Ergebnis lautet $\Delta E_{str} = 3 \times 10^{-8}$ eV.

   *2 Punkte*

c) In einem Speicherring werden Elektronen beschleunigt, welche wiederum Strahlung abgeben. Diese Strahlung bezeichnet man als Synchrotronstrahlung. Ein Elektron werde in solch einem Speicherring mit $R_0 \approx 1$ km beschleunigt. Berechnen Sie $\Delta E_{str}$ wenn die Energie des Elektrons 30 GeV beträgt. Für diese Energie gilt $\gamma^4 \approx 1.3 \times 10^{19}$. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit $\Delta E_{str}$ aus b).

   *Hinweis:* Es gilt $\vec{p} = m_e\gamma\vec{v}$.

   *2 Punkte*

*Bitte schreiben Sie auf die erste Seite des Übungsblattes Ihre Namen, Matrikelnummer und die Nummer Ihres Tutoriums.*

## Hinweis zum Übungsbetrieb:

Die online-Anmdeldung zur Vorleistung ist freigeschaltet. Bitte melden Sie sich zeitnah an.