Klassische Theoretische Physik III
Elektrodynamik WS 18/19

Institut für Kernphysik, KIT

Prof. T. Schwetz-Mangold, Dr. O. Fischer, A. Pargner

11. Übung — Besprechung: 23.01.19

Aufgabe 1 — 10 Punkte + 2 Bonuspunkte

In dieser Aufgabe behandeln wir Rayleigh-Streuung, die Streuung von Licht. Der Ausgangspunkt ist eine monochromatische ebene Welle mit elektrischem Feld $\vec{E}_1$ und magnetischem Feld $\vec{B}_1$, welche sich auf ein Objekt zu bewegt, dessen Ausmaß (d) klein ist im Vergleich zur Wellenlänge (λ). Um das Objekt herum sei Vakuum. Das elektrische Feld $\vec{E}_1$ sei in die Richtung $\vec{\epsilon}_1$ polarisiert, die einlaufende Richtung ist $\vec{n}_1$. Die Lichtwelle erzeugt einen elektrischen und magnetischen Multipol im Objekt, welcher eine Quelle für das gestreute Licht mit Komponenten $\vec{E}_2$ und $\vec{B}_2$ ist. Das gestreute Licht bewege sich in die Richtung $\vec{n}_2$ und habe die Polarisation $\vec{\epsilon}_2$.

a) In grosser Entfernung r vom Streukörper, d.h. $r \gg \lambda$, dominiert der Beitrag des Dipolmoments das elektrische und magnetische Feld. Da die einlaufende Welle monochromatisch ist gibt es nur die Zeitskala $\omega = c/\lambda$ und wir können die Zeitabhängigkeit der Quellen durch

$$\rho(\vec{r},t) = \rho(\vec{r})e^{-i\omega t}, \qquad \vec{j}(\vec{r},t) = \vec{j}(\vec{r})e^{-i\omega t} \tag{1}$$

beschreiben. Bemerken Sie, dass wir bei einer komplexen Schreibweise immer implizit verstehen, dass am Ende der Berechnung nur der Realteil betrachtet wird. Benutzen Sie Gl. (1), um das Vektorpotential

$$\vec{A}(\vec{r,t}) = \frac{1}{c}\int d^3r' \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\vec{j}(\vec{r}',t)$$

für $\lambda \gg r'$ durch das Dipolmoment $\vec{p}$ der Quelle auszudrücken (erinnern Sie sich, dass sich die Dipolkomponente wie $1/r$ verhält). Berechnen Sie damit $\vec{E}_2$ und $\vec{B}_2$ aus $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ und $\dot{E}/c = \vec{\nabla} \times \vec{B}$. Bedenken Sie, dass $\vec{n}_2 = \vec{r}/r$ und vernachlässigen Sie Terme von höherer Ordnung als $1/r$. Ihr Ergebnis sollte die folgende Form haben:

$$\vec{B}_2(\vec{r},t) \simeq k^2 \frac{e^{ikr}}{r}(\vec{n}_2 \times \vec{p})e^{-i\omega t}\ , \tag{2}$$

$$\vec{E}_2(\vec{r},t) \simeq \vec{B}_2(\vec{r},t) \times \vec{n}_2\,. \tag{3}$$

Hierbei wurde $k = \omega/c$ und benutzt und dass das elektrische und das magnetische Feld ein Orthogonalsystem mit $\vec{n}_2$ bilden.

Hinweis: Benutzen Sie die Kontinuitätsgleichung, um das Integral über die Stromdichte in ein Dipolmoment umzuformen.

5 Punkte

b) Nun berechnen wir den differentiellen Wirkungsquerschnitt $d\sigma/d\Omega$ dieses Streuprozesses. Das elektrische und magnetische Feld der einlaufenden Welle sei durch

$$\vec{E}_1 = \vec{\epsilon}_1 E_0 e^{ik\vec{n}_1\cdot\vec{r}-i\omega t}\ , \tag{4}$$

$$\vec{B}_1 = \vec{n}_1 \times \vec{E}_1 \tag{5}$$

gegeben. Der differentielle Wirkungsquerschnitt ist definiert als Verhältnis aus abgestreuter Leistung pro Raumwinkelelement $d\Omega$ und einfallender Leistung pro Fläche. Da der Energiefluss durch den Poynting-Vektor gegeben ist, schreiben wir in unserem Fall:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\vec{n}_2, \vec{\epsilon}_2; \vec{n}_1, \vec{\epsilon}_1) = \frac{\vec{n}_2 \cdot \vec{S}(\vec{n}_2, \vec{\epsilon}_2) r^2 d\Omega}{\vec{n}_1 \cdot \vec{S}(\vec{n}_1, \vec{\epsilon}_1) d\Omega} \,. \tag{6}$$

Der Poynting-Vektor in Vakuum ist durch

$$\vec{S}(\vec{r}, t) = \frac{c}{4\pi} \vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t) \tag{7}$$

gegeben. Benutzen Sie dies um den differentiellen Wirkunggsquerschnitt zu berechnen. Das Ergebnis sollte sein:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\vec{n}_2, \vec{\epsilon}_2; \vec{n}_1, \vec{\epsilon}_1) = \frac{k^4}{|E_0|^2} (\vec{\epsilon}_2 \cdot \vec{p})^2 \,. \tag{8}$$

3 Punkte

c) Um $\vec{n} \cdot \vec{p}$ in Gl. (8) explizit zu berechnen, benötigen wir ein Modell des Streukörpers. Im einfachsten Fall betrachten wir den Streukörper als homogene Kugel. Hier ist der Zusammenhang zwischen dem einlaufenden Feld $\vec{E}_1$ und dem Dipolmement der Quelle $\vec{p}$ durch

$$\vec{p} \propto \vec{E}_1 \tag{9}$$

gegeben. Benutzen Sie diese Relation in Gl. (8). Drücken Sie weiter $\vec{\epsilon}_2$ als Funktion der einlaufenden Polarisation und der auslaufenden Richtung aus. Benutzen Sie dazu, dass $\vec{\epsilon}_2 \sim \vec{E}_2$ ist. Ihr Ergebnis sollte von der Form

$$\vec{\epsilon}_2 \sim \vec{\epsilon}_1 - \vec{n}_2 (\vec{n}_2 \cdot \vec{\epsilon}_1) \tag{10}$$

sein. Geben Sie damit das Verhalten des differentiellen Wirkungsquerschnitt $d\sigma/d\Omega$ als Funktion von $\vec{\epsilon}_1$, $\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$ an.

2 Punkte

d) Argumentieren Sie anhand von Gl. (8) warum der Himmel vorwiegend blau erscheint. Für eine gegebene Richtung der Streuung, was sind die möglichen Polarisationen?

2 Bonusunkte

Aufgabe 2 — 6 Punkte

In dieser Aufgabe betrachten wir einige Eigenschaften der Lorentz-Transformationen. Nehmen Sie an, dass die zwei Bezugssysteme (S und S') durch folgende Relation in Verbindung stehen:

$$\begin{aligned} t &= \gamma \left(t' + \frac{v}{c^2} x' \right), \\ x &= \gamma \left(x' + v t' \right), \\ y &= y', \\ z &= z', \end{aligned}$$

wobei $\gamma \equiv 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Die "gestrichenen" Koordinaten werden mit S', die "ungestrichenen' Koordinaten mit S assoziiert. Aus der Perspektive von S bewegt sich S' mit der Geschwindigkeit v in positive x-Richtung. Aus der Perspektive von S' bewegt sich S mit v in negative x'-Richtung.

a) Überprüfen Sie, dass das Raumzeit-Intervall $(\Delta s)^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2$ invariant unter dieser Koordinatentransformation ist.

2 Punkte

b) Nehmen Sie an, dass zwei, durch $\Delta x'$ räumlich getrennte, Ereignisse A und B im Bezugssystem S' zur gleichen Zeit geschehen. Geschehen sie auch gleichzeitig in S? Begründen Sie Ihre Antwort.

2 Punkte

c) Betrachten Sie ein Lineal, dass in S am Ursprung platziert sei. Die Länge des Lineals sei $\Delta x = 10$ m. In S' erscheint es als würde sich das Lineal in negative x-Richtung mit der Geschwindigkeit v bewegen. Nehmen Sie an, dass die Geschwindigkeit die halbe Lichtgeschwindigkeit beträgt. Welche Länge hat das Lineal in S'?

1 Punkt

d) Ein Raumschiff ruhe am Ursprung in S' und sende eine Sonde mit drei Viertel der Lichtgeschwindigkeit in positive x'-Richtung. Wie schnell bewegt sich die Sonde in S, wenn die Relativgeschwindigkeit zwischen den Bezugssystemen die halbe Lichtgeschwindigkeit beträgt?

1 Punkt

Aufgabe 3 — 4 Punkte

Durch Wechselwirkung zwischen kosmischer Strahlung und Teilchen in der Atmosphäre werden Myonen erzeugt. Nehmen Sie an dass N_0 Myonen zum Zeitpunkt $t = 0$ erzeugt werden. Da Myonen zerfallen, werden zu einem späteren Zeitpunkt t nur noch

$$N = N_0 e^{-t/\tau}$$

übrig sein. Hier ist $\tau = 2.20\ \mu$s die mittlere Lebenszeit eines Myons.

a) Nehmen Sie an, dass sich die Myonen mit einer Geschwindigkeit $v = 0.95c$ bewegen. Was ist die Lebenszeit der Myonen für einen Beobachter, der relativ zur Erde gesehen ruht?

2 Punkte

b) Wie viele Myonen sind übrig, nachdem sie eine Strecke von 15 km zurückgelegt haben?

2 Punkte

Bitte schreiben Sie auf die erste Seite des Übungsblattes Ihre Namen, Matrikelnummer und die Nummer Ihres Tutoriums.

Hinweis zum Übungsbetrieb:

Die online-Anmdeldung zur Vorleistung ist freigeschaltet. Bitte melden Sie sich zeitnah an.