Klassische Theoretische Physik III
Elektrodynamik WS 18/19

Institut für Kernphysik, KIT

Prof. T. Schwetz-Mangold, Dr. O. Fischer, A. Pargner

12. Übung — Besprechung: 30.01.19

Aufgabe 1 — 12 Punkte

Wir betrachten die Fouriertransformation einer Gauß Funktion:

$$\Psi(k) = C \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a^2}{4}x^2}\, e^{-ikx}\, dx\,,$$

mit der Normierungskonstante C. Bei der Integration treten wiederholt Integrale folgender Form auf:

$$I(\alpha,\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2(\tau-\beta)^2}\, d\tau\,,$$

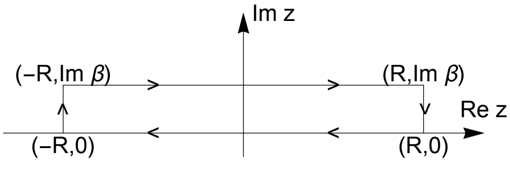
mit den komplexen Koeffizienten α, β und $\mathrm{Re}(\alpha^2) > 0$ (Konvergenzbedingung).

> Für diese Aufgabe benötigen Sie der Residuensatz, welcher in einfacher Form lautet
>
> $$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \mathrm{Res}(f, z_k)\,,$$
>
> wobei die z_k die vom geschlossenen Weg γ eingeschlossenen Singularitäten (N Stück) der Funktion $f(z)$ sind. Hat $f(z)$ im umschlossenen Gebiet keine Singularität, dann ist $\int_\gamma f(z)dz = 0$.
>
> $$\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r(z_0)} f(\omega)\, d\omega$$
>
> heißt das Residuum der Funktion f an der Stelle z_0.

a) Zeigen Sie die Unabhängigkeit des Integrals I vom Koeffizienten β:

$$I(1,\beta) = I(1,0)$$

Verwenden Sie hierfür den Residuensatz, folgen sie dem vorgegebenen Integrationsweg in der Komplexen Ebene und betrachten Sie den Grenzfall $R \to \infty$:



3 Punkte

b) Zeigen Sie, dass gilt:

$$I(1,0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau^2}\, d\tau = \sqrt{\pi}\,.$$

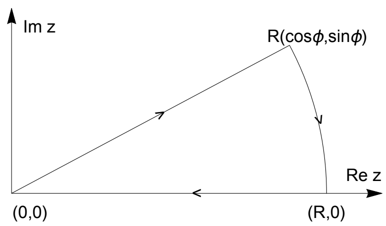
Transformieren Sie hierfür die Integrationsvariable in ebene Polarkoordinaten und lösen Sie das Integral elementar.

3 Punkte

c) Zeigen Sie, dass gilt:

$$I(\alpha, 0) = \frac{1}{|\alpha|} I(1, 0) \,.$$

Stellen Sie α in der Form $\alpha = |\alpha|\, e^{i\Phi}$ dar, eleminieren Sie $|\alpha|$ durch Substitution und berechnen Sie das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(e^{i\Phi}\,\tau)^2}\, d\tau$ mit Hilfe eines geeigneten Integrationswegs in der Komplexen Ebene (siehe Beispiel).



3 Punkte

d) Berechnen Sie einen expliziten Ausdruck für das Wellenpaket $\Psi(k)$.

3 Punkte

Aufgabe 2 **8 Punkte**

In dieser Aufgabe befassen wir uns mit den Eigenschaften der Lorentz-Transformation, welche Raum-Zeit Koordinaten zwischen zwei Bezugssystemen transformiert.

a) Betrachten Sie die Lorentz-Transformation $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$. Berechnen Sie die inverse Lorentz-Transformation $(\Lambda^{\mu}{}_{\nu})^{-1}$ unter Verwendung der folgenden Beziehung:

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu}\eta_{\mu\rho}\Lambda^{\rho}{}_{\sigma} = \eta_{\nu\sigma} \,.$$

Verwenden Sie hierfür $\eta_{\alpha\beta}\eta^{\beta\gamma} = \delta^{\gamma}_{\alpha}$.
Hinweis: Achten Sie auf die Position der Lorentz-Indices. Diese können durch Multiplikation mit $\eta^{\alpha\beta}$ von einer unteren in eine obere Position, bzw. übver $\eta_{\alpha\beta}$ von einer oberen in eine untere Position gebracht werden

2 Punkte

b) Definieren Sie einen Kovektor $V_\mu = \eta_{\mu\nu}V^\nu$. Der Kovektor transformiert sich nach $\left(\Lambda^{-1}\right)^{\nu}{}_{\mu} V_\nu$. Zeigen Sie, dass $V_\mu V^\mu$ invariant unter Lorentz-Transformationen ist. Benutzen Sie dies, um zu zeigen, dass das Raum-Zeit-Intervall invariant unter Lorentz-Transformationen ist.

2 Punkte

c) Eine Lorentz-Transformation $(\Lambda^{\mu}{}_{\nu})$ und der Metrische Tensor der Minkowski-Metrik können durch folgende 4×4 Matrizen dargestellt werden:

$$(\Lambda^{\mu}{}_{\nu}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (\eta_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass die inverse Lorentz-Transformation der ursprünglichen Transformation entspricht, mit der Ersetzung $\beta \to -\beta$. Berechnen Sie hierfür die inverse Lorentz-Transformation explizit aus den oben gegebenen Matrizen.

2 Punkte

d) Zeigen Sie explizit, dass zwei aufeinander folgende Lorentz-Boosts in die gleiche Richtung, äquivalent zu einer einzigen Lorentz-Transformation sind mit der Geschwindigkeit:

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2 / c^2} \,. \tag{1}$$

2 Punkte

Bitte schreiben Sie auf die erste Seite des Übungsblattes Ihre Namen, Matrikelnummer und die Nummer Ihres Tutoriums.

Hinweis zum Übungsbetrieb:

Die online-Anmeldung zur Vorleistung ist freigeschaltet. Bitte melden Sie sich zeitnah an.