# Klassische Theoretische Physik III
# Elektrodynamik WS 18/19

Institut für Kernphysik, KIT

Prof. T. Schwetz-Mangold, Dr. O. Fischer, A. Pargner

## 13. Übung — Besprechung: 06.02.19

### Aufgabe 1 — 8 Punkte + 2 Bonuspunkte

Der elektromagnetische Feldstärketensor ist durch $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ gegeben.

a) Benutzen Sie die Beziehung zwischen $A^\mu$ und $\vec{E}$ bzw. $\vec{B}$, um $F^{\mu\nu}$ durch das elektrische und magnetische Feld auszudrücken.

*2 Punkte*

b) Drücken Sie nun auch $F_{\mu\nu}$ and $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$ durch $\vec{E}$ und $\vec{B}$ aus.

*2 Punkte*

c) Benutzen Sie Ihre Ergebnisse, um zu zeigen, dass

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu, \qquad \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$$

zu den Ihnen bekannten Maxwell-Gleichungen führen.

*2 Punkte*

d) Da sich $F^{\mu\nu}$ wie ein Tensor transformiert, gilt unter einer Lorentz-Transformationen $\Lambda$

$$F^{\mu\nu} \to \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta F^{\alpha\beta} \ . \tag{1}$$

Benutzen Sie diesen Zusammenhang, um das Transformationsverhalten von $\vec{E}$ und $\vec{B}$ zu bestimmen. Identifizieren Sie dazu die neuen Felder $\vec{E}'$ und $\vec{B}'$, nachdem Sie eine Lorentz-Tranformation für $F^{\mu\nu}$ durchgeführt haben. Benuzten Sie dazu die explizite Form

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

für $\Lambda$ in Gl. (1).

*2 Punkte*

e) Benutzen Sie nun, dass sich $A^\mu$ wie ein Vierervektor transformiert, um nochmals das Transformationsverhalten von $\vec{E}$ und $\vec{B}$ herzuleiten. Benutzen Sie dieselbe Form für $\Lambda$ wie in d).

*Hinweis:* Bedenken Sie auch die Ableitungen entsprechend zu transformieren, wenn Sie einen Zusammenhang zwischen dem transformierten Vierervektor und den Feldern $\vec{E}'$ und $\vec{B}'$ herleiten wollen.

*2 Bonuspunkte*

**Aufgabe 2** **8 Punkte**

Im Folgenden analysieren wir das Transformationsverhalten der Lagrange-Dichten:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \qquad \text{und} \qquad \mathcal{L}' = -\frac{1}{4\pi} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} \,, \tag{2}$$

mit den Definitionen für die Feldstärketensoren $F$ und $\tilde{F}$ aus Aufgabe 1.

a) Zeigen Sie explizit, dass $\mathcal{L}$ und $\mathcal{L}'$ invariant unter Lorentz-Transformationen sind.

*Hinweis:* Das Levi-Citita Symbol $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ transformiert unter Lorentz-Transformationen wie folgt: $\epsilon \to \det\Lambda\, \epsilon$. Hier betrachten wir nur die eigentlichen Lorentztransformationen, welche über $\det\Lambda = +1$ definiert sind.

*4 Punkte*

b) Betrachten Sie das verhalten der Lagrangedichten $\mathcal{L}$ und $\mathcal{L}'$ unter den diskreten Transformationen $P$ (Raumspiegelung) und $T$ (Zeitumkehr). Was ergibt sich bei einer direkten Hintereinanderausführung von $P$- und $T$-Transformationen?

*Hinweis:* Erinnern Sie sich daran, dass Sie auf Blatt 10 bereits das Verhalten der elektrischen und magnetischen Felder unter den diskreten Tranfsformationen kennen gelernt haben.

*4 Punkte*

**Aufgabe 3** **4 Punkte**

Ein Teilchen mit Masse $m$ und Ladung $q$ bewege sich in einem konstanten, homogenen Magnetfeld $\vec{B} = B\vec{e}_z$. Lösen Sie die relativistische Bewegungsgleichung mit den Anfangsbedingungen

$$u^\alpha\,(\tau = 0) = \begin{pmatrix} \gamma_0 c \\ \gamma_0 v_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \,,$$

wobei $\gamma_0 = (1 - v_0^2/c^2)^{-1/2}$ und $v_0$ die Anfangsgeschwindigkeit ist. Drücken Sie Ihr Ergebnis als Flugbahn $x(\tau)$ aus, wobei sich das Teilchen bei $\tau = 0$ am Ursprung befinde. Identifizieren Sie die Frequenz der Bewegung. Diese Frequenz bezeichnen wir als Zyklotronfrequenz. Welche Art von Bewegung beschreibt diese Flugbahn?

*Bitte schreiben Sie auf die erste Seite des Übungsblattes Ihre Namen, Matrikelnummer und die Nummer Ihres Tutoriums.*

## Hinweis zum Übungsbetrieb:

Die online-Anmeldung zur Vorleistung ist freigeschaltet. Bitte melden Sie sich zeitnah an.