Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theorie
der Kondensierten Materie

Klassische Theoretische Physik III WS 2020/2021

Prof. Dr. M. Garst
Dr. B. Narozhny

Blatt 0
Besprechung 03-04.11.2020

---

1. Dirac'sche Deltafunktion:

Die Dirac'sche Deltafunktion $\delta(x)$ hat die Eigenschaft $\delta(x) = 0$ für $x \neq 0$. Für beliebige (hinreichend glatte) Funktionen $f(x)$ gilt

$$\int_a^b dx f(x)\,\delta(x-x_0) = \begin{cases} f(x_0), & \text{falls} \quad x_0 \in (a,b) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} .$$

Insbesondere gilt die Normierungsbedingung

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\,\delta(x-x_0) = 1.$$

Es gibt viele Möglichkeiten, die Deltafunktion durch einen Grenzübergang aus "gewöhnlichen" Funktionen zu konstruieren.

(a) Zeigen Sie, dass sich die Deltafunktion darstellen lässt durch

$$\delta(x-x_0) = \lim_{\epsilon\to 0} L_\epsilon(x-x_0), \quad \text{mit} \quad L_\epsilon(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\epsilon}{x^2+\epsilon^2},$$

und

$$\delta(x-x_0) = \lim_{\epsilon\to 0} G_\epsilon(x-x_0), \quad \text{mit} \quad G_\epsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\epsilon}\,e^{-x^2/\epsilon^2},$$

(b) Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden Formel

$$\delta[g(x)] = \sum_n \frac{\delta(x-x_n)}{|g'(x_x)|}.$$

Hier sei $g(x)$ eine stetig differenzierbare Funktion mit einfachen Nullstellen an den Punkten x_n und im Nenner steht der Betrag der Ableitung

$$g'(x_x) = \left.\frac{dg}{dx}\right|_{x_n} .$$

(c) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^{\infty} dx\,x^2\,\delta\left(x^2-6x+8\right).$$

(d) Berechnen Sie mit einer beliebigen Testfunktion $f(x)$ das Integral

$$\int\limits_0^\infty dx\, f(x)\, \delta\left(x - b + \sqrt{x^2 + a^2}\right).$$

(e) Bestimmen Sie die folgende Eigenschaften:

$$x\,\delta(x) = 0, \qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta'(x - x_0) f(x) = -f'(x_0).$$

2. Nabla-Kalkül:

Hier verwenden wir die folgenden Symbole:

$$\vec{\nabla} f \equiv \mathrm{grad} f, \qquad \vec{\nabla}\vec{u} \equiv \mathrm{div}\vec{u}, \qquad \vec{\nabla} \times \vec{v} \equiv \mathrm{rot}\vec{v}, \qquad \vec{\nabla}^2 \equiv \Delta.$$

(a) Finden Sie (mit $r \equiv |\vec{r}|$)

$$\vec{\nabla} r, \quad \vec{\nabla}\vec{r}, \quad \vec{\nabla}\frac{1}{r}, \quad \vec{\nabla}\frac{1}{r^3}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{r}, \quad \vec{\nabla} f(r), \quad \vec{\nabla} \times \left[f(\vec{r})\frac{\vec{r}}{r}\right].$$

(b) Berechnen Sie

$$\vec{\nabla}\left(e^{i\vec{k}\vec{r}}\right), \qquad \vec{\nabla}\left(\vec{d}e^{i\vec{k}\vec{r}}\right), \qquad \vec{\nabla} \times \left(\vec{d}e^{i\vec{k}\vec{r}}\right),$$

wobei $\vec{k}$ und $\vec{d}$ konstante Vektoren sind.

(c) Rechnungen, die in der Elektrodynamik auftreten, verwenden oft folgende Identitäten. Zeigen Sie, dass

$$\vec{\nabla}\left(\vec{v} \times \vec{w}\right) = \vec{w}\left(\vec{\nabla} \times \vec{v}\right) - \vec{v}\left(\vec{\nabla} \times \vec{w}\right),$$

$$\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \times \vec{v}\right) = 0,$$

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{v}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\vec{v}\right) - \Delta\vec{v},$$

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{v} \times \vec{w}\right) = \vec{v}\left(\vec{\nabla}\vec{w}\right) - \vec{w}\left(\vec{\nabla}\vec{v}\right) + \left(\vec{w}\vec{\nabla}\right)\vec{v} - \left(\vec{v}\vec{\nabla}\right)\vec{w},$$

gilt, wobei $\vec{v}(\vec{r})$ und $\vec{w}(\vec{r})$ Vektorfunktionen sind.

(d) Bestimmen Sie die folgenden Produktregeln

$$\vec{\nabla}\left(f\vec{v}\right) = \vec{v}\left(\vec{\nabla} f\right) + f\vec{\nabla}\vec{v}, \qquad \vec{\nabla} \times \left(f\vec{v}\right) = -\vec{v} \times \left(\vec{\nabla} f\right) + f\vec{\nabla} \times \vec{v},$$

wobei $\vec{v}(\vec{r})$ eine Vektorfunktion und $f(\vec{r})$ eine Skalarfunktion ist.

(e) Bestimmen Sie die folgenden Kettenregeln

$$\vec{\nabla}\vec{P}\left(f(\vec{r})\right) = \vec{P}'\left(f(\vec{r})\right)\vec{\nabla} f(\vec{r}), \qquad \vec{\nabla} \times \vec{P}\left(f(\vec{r})\right) = -\vec{P}'\left(f(\vec{r})\right) \times \left(\vec{\nabla} f(\vec{r})\right),$$

mit $\vec{P}' = \frac{\partial \vec{P}}{\partial f}$. $\vec{P}(f)$ ist hier ein Vektorfeld auf $\mathbb{R}$.