

Klassische Theoretische Physik III WS 2020/2021**Prof. Dr. M. Garst**
Dr. B. Narozhny**Blatt 1**
Lösungen

1. Coulomb-Kraft:

Berechnen Sie die Coulomb-Kraft zwischen zwei Elektronen im Abstand von $r = 10^{-9} \text{ m}$ im SI und im Gauß'schen System.

Hier kein Material angegeben ist, deswegen setzen wir die relative Permittivität gleich Eins: $\epsilon_r = 1$.

(a) *Die Coulomb-Kraft im SI System:*

$$F = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Die Konstanten:

$$e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ A} \cdot \text{s}; \quad \epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{V} \cdot \text{m}}.$$

Das Ergebnis:

$$F(r = 10^{-9} \text{ m}) = 2.307 \times 10^{-10} \text{ N}.$$

(b) *Die Coulomb-Kraft im Gauß'schen System:*

$$F = \frac{e^2}{r^2}.$$

Das Ergebnis

$$F(r = 10^{-9} \text{ m}) = 2.307 \times 10^{-5} \text{ dyn}.$$

2. Gauß'scher Satz:

Berechnen Sie mit Hilfe des Gauß'schen Satzes das elektrische Feld im Innen und Außenraum der folgenden, kugelsymmetrischen Ladungsverteilungen (Gesamtladung Q und Radius R). Skizzieren Sie jeweils den Feldverlauf sowohl im Innen- als auch im Außenraum.

Das gaußsche Gesetz: Der Gesamtfluss durch die Oberfläche A ist gleich die eingeschlossene Ladung q

$$\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Wegen der Rotationssymmetrie sind alle Größen nur vom Betrag $r = |\vec{r}|$ abhängig. Das elektrische Feld ist radial, d.h. es ist parallel zum Normalenvektor der Kugeloberfläche ausgerichtet. Dann der Fluss des elektrischen Feldes durch eine Kugeloberfläche ist

$$\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = 4\pi r^2 E(r),$$

wobei r der Radius der Kugeloberfläche ist.

Die eingeschlossene Ladung berechnen wir als ein Volumenintegral von der Ladungsdichte über dem gesamten von A eingeschlossenen Volumen V

$$q = \int_V d^3r' \rho(r') = 4\pi \int_0^r dr' (r')^2 \rho(r').$$

Letzendlich bekommen wir für das elektrischen Feld

$$E(r) = \frac{1}{\epsilon_0 r^2} \int_0^r dr' (r')^2 \rho(r').$$

(a) *leitende Kugel:*

Die Ladungen sind gleichmäßig auf der Oberfläche der Kugel verteilt, d.h die Ladungsdichte ist:

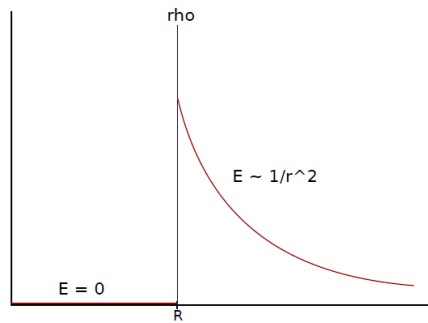
$$\rho(r) = \frac{Q}{4\pi R^2} \delta(r - R).$$

Wählen wir den Mittelpunkt der Kugel als Koordinatenursprung. Als A nehmen wir eine Kugeloberfläche von Radius r . Benutzen wir jetzt das gaußsche Gesetz:

$$E(r) = \frac{1}{\epsilon_0 r^2} \int_0^r dr' (r')^2 \rho(r') = \frac{Q}{4\pi R^2 \epsilon_0 r^2} \int_0^r dr' (r')^2 \delta(r' - R) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \theta(r - R).$$

Hier

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}.$$



(b) *gleichmässig verteilte Ladung:*

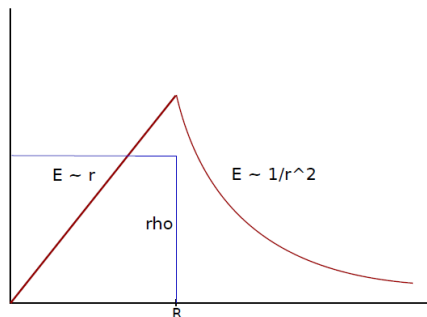
Jetzt ist die Ladungsdichte

$$\rho(r) = \frac{3Q}{4\pi R^3} \theta(R - r).$$

Das elektrische Feld ist

$$E(r) = \frac{3Q}{4\pi R^3 \epsilon_0 r^2} \int_0^r dr' (r')^2 \theta(R - r') = \frac{3Q}{4\pi R^3 \epsilon_0 r^2} \left[\frac{R^3}{3} \theta(r - R) + \frac{r^3}{3} \theta(R - r) \right]$$

$$E(r) = \frac{Qr}{4\pi \epsilon_0 R^3} \theta(R - r) + \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \theta(r - R).$$



(c) *Ladungsdichte, die mit r^n variiert ($n > -3$, Skizze für $n = \pm 2$):*

Wie in den vorherigen Aufgaben auch, muss die Ladungsdichte so normiert werden, dass das Integral über dem Volumen der Ladungsverteilung die Gesamtladung Q ergibt:

$$4\pi \int_0^R dr r^2 \rho(r) = Q.$$

Nehmen wir den folgenden Ansatz für die Ladungsdichte:

$$\rho(r) = \mathcal{N} Q r^n \theta(R - r).$$

Die Normierungskonstante $\mathcal{N}$ finden wir von der obigen Gleichung

$$4\pi \int_0^R dr r^2 \mathcal{N} Q r^n = Q \quad \Rightarrow \quad \mathcal{N} = \frac{n+3}{4\pi R^{n+3}}.$$

Das elektrische Feld ist

$$E(r) = \frac{(n+3)Q}{4\pi R^{n+3} \epsilon_0 r^2} \int_0^r dr' (r')^2 (r')^n \theta(R - r') = \frac{Q r^{n+1}}{4\pi \epsilon_0 R^{n+3}} \theta(R - r) + \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \theta(r - R).$$

