KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE

INSTITUT FÜR THEORIE DER KONDENSIERTEN MATERIE

Klassische Theoretische Physik III WS 2020/2021

Prof. Dr. M. Garst
Dr. B. Narozhny

Blatt 2
Abgabe 13.11.2020, Besprechung 17-18.11.2020

---

1. Sphärische Koordinaten: (40 Punkte)

In dreidimensionalen kartesischen Koordinaten ist der Ortsvektor gegeben durch

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z.$$

Hier haben wir die orthonormierten Basisvektoren verwendet

$$\boldsymbol{e}_x = (1,0,0), \qquad \boldsymbol{e}_y = (0,1,0), \qquad \boldsymbol{e}_z = (0,0,1).$$

Es kann auch sinnvoll sein, ein anderes Basissystem zu verwenden. Die Transformation zu sphärischen Koordinaten ist definiert als

$$\begin{cases} x = r\sin\vartheta\cos\varphi \\ y = r\sin\vartheta\sin\varphi \\ z = r\cos\vartheta \end{cases}, \qquad r \geqslant 0, \quad \vartheta \in [0,\pi), \quad \varphi \in [0, 2\pi).$$

Die neuen Basisvektoren sind definiert als

$$\boldsymbol{e}_r = \frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}, \qquad \boldsymbol{e}_\vartheta = \frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial\vartheta}, \qquad \boldsymbol{e}_\varphi = \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial\varphi}.$$

(a) Berechnen Sie $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\vartheta$ und $\boldsymbol{e}_\varphi$ als Funktionen von r, ϑ, und φ.

(b) Drücken Sie den Ortsvektor $\boldsymbol{r}$ in der sphärischen Koordinatenbasis aus.

(c) Drücken Sie den Nabla-Operator $\boldsymbol{\nabla}$ in der sphärischen Koordinatenbasis aus. Beachten Sie, dass die Basisvektoren von Ort abhängen.

(d) Drücken Sie den Gradienten, die Divergenz, und die Rotation eines Vektorfeldes in der sphärischen Koordinatenbasis aus.

2. Zylindrische Koordinaten: (20 Punkte)

Wiederholen Sie die Aufgabe 1 für die zylindrische Koordinaten. Diese sind definiert als

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases}, \qquad \rho \geqslant 0, \quad \varphi \in [0,2\pi), \qquad \boldsymbol{e}_\rho = \frac{x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y}{\rho}, \quad \boldsymbol{e}_\varphi = \frac{\partial \boldsymbol{e}_\rho}{\partial\varphi}$$

3. Vektoranalysis: (40 Punkte)

Betrachten Sie Zylinderkoordinaten. Es sei ein skalares Feld gegeben

$$V(\boldsymbol{r}) = \varphi,$$

mit dem Winkel φ.

(a) Berechnen Sie den Gradienten $\boldsymbol{\nabla} V$.

(b) Berechnen Sie die Rotation des Gradienten $\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} V)$ für alle endliche Abstände $\rho > 0$ von der z-Achse.

(c) Betrachten Sie das Flachenintegral

$$\int_{\mathcal{F}} d\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} V)$$

über einen Kreis $\mathcal{F}$ mit Radius R innerhalb der (xy)-Ebene zentriert um $z = 0$. Bestimmen Sie den Wert des Integrals mithilfe des Stokes'schen Setzes. Ist V zweimal differenzierbar?

(d) Wiederholen Sie die Rechnung mit

$$V(\boldsymbol{r}) = \rho,$$

mit dem Abstand zur z-Achse ρ. Ist dieses skalare Feld zweimal differenzierbar?