

Blatt 2 Tobias

Sonntag, 8. November 2020 12:29

100/100

1a)

$$\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r} = \begin{pmatrix} \sin\vartheta \cos\varphi \\ \sin\vartheta \sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}; \vec{e}_\vartheta = \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \vartheta} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta \cos\varphi \\ \cos\vartheta \sin\varphi \\ -\sin\vartheta \end{pmatrix}; \vec{e}_\varphi = \frac{1}{\sin\vartheta} \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

b) $\vec{r} = r \vec{e}_r \quad \checkmark$

c) Sei $\phi(r, \varphi, \vartheta)$ eine beliebige skalare Funktion

Für den Nabla Operator muss dann nach Definition gelten:

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} dr + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta} d\vartheta = \vec{e}_r dr + r \vec{e}_\vartheta d\vartheta + r \sin\vartheta \vec{e}_\varphi d\varphi$$

$$d\phi = \vec{\nabla} \phi \cdot d\vec{r}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} dr + \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} d\vartheta = \vec{\nabla} \phi \cdot d\vec{r} \quad \text{Sei } \vec{\nabla} \phi = n_1 \vec{e}_r + n_2 \vec{e}_\vartheta + n_3 \vec{e}_\varphi$$

$$= n_1 dr + n_2 r d\vartheta + n_3 r \sin\vartheta d\varphi$$

Aus Koeffizientenvergleich folgt:

$$n_1 = \frac{\partial \phi}{\partial r}$$

$$n_2 r = \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} \Rightarrow n_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta}$$

$$n_3 r \sin\vartheta = \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \Rightarrow n_3 = \frac{1}{r \sin\vartheta} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi}$$

Damit hat der Nabla Operator folgende Form: $\vec{\nabla} = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\vec{e}_\vartheta}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{\vec{e}_\varphi}{r \sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad \checkmark$

d)

Gradient wie in c):

$$\vec{\nabla} \phi = \vec{e}_r \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\vec{e}_\vartheta}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} + \frac{\vec{e}_\varphi}{r \sin\vartheta} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi}$$

Divergenz:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = A_r \vec{e}_r + A_\vartheta \vec{e}_\vartheta + A_\varphi \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \left(\vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\vartheta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r \sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \cdot (A_r \vec{e}_r + A_\vartheta \vec{e}_\vartheta + A_\varphi \vec{e}_\varphi)$$

$$= \frac{\partial A_r}{\partial r} + A_r \frac{1}{r} + \frac{\partial A_\vartheta}{\partial \vartheta} \cdot \frac{1}{r} + A_\vartheta \frac{1}{r} + A_\varphi \frac{\cos\vartheta}{r \sin\vartheta} + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \cdot \frac{1}{r \sin\vartheta}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \varphi} &= \begin{pmatrix} -\sin\vartheta \sin\varphi \\ \sin\vartheta \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \varphi} \cdot \vec{e}_\varphi = \sin\vartheta \\ \frac{\partial \vec{e}_\vartheta}{\partial \varphi} &= \begin{pmatrix} -\cos\vartheta \sin\varphi \\ \cos\vartheta \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\partial \vec{e}_\vartheta}{\partial \varphi} \cdot \vec{e}_\varphi = \cos\vartheta \\ \vec{e}_\varphi &= \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -\cos\varphi \\ -\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\}$$

Rotation:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\vartheta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r \sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \times (A_r \vec{e}_r + A_\vartheta \vec{e}_\vartheta + A_\varphi \vec{e}_\varphi)$$

$$= \left(\vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} \right) \times (A_\vartheta \vec{e}_\vartheta + A_\varphi \vec{e}_\varphi) + \left(\vec{e}_\vartheta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) \times (A_r \vec{e}_r + A_\varphi \vec{e}_\varphi) + \left(\vec{e}_\varphi \frac{1}{r \sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \times (A_r \vec{e}_r + A_\vartheta \vec{e}_\vartheta)$$

$$= \frac{\partial A_\vartheta}{\partial r} \vec{e}_\varphi - \frac{\partial A_\varphi}{\partial r} \vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\vartheta}{\partial \vartheta} \vec{e}_\varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \vartheta} \vec{e}_r + \frac{1}{r \sin\vartheta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \vec{e}_\vartheta - \frac{1}{r \sin\vartheta} \frac{\partial A_\vartheta}{\partial \varphi} \vec{e}_r + \frac{A_\vartheta}{r \sin\vartheta} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_\varphi \times \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sin\vartheta \cos\varphi \sin\vartheta + \cos\varphi \sin\vartheta \sin\vartheta \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\vec{e}_\varphi \times \frac{\partial \vec{e}_\vartheta}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sin\vartheta \cos\varphi \cos\vartheta + \cos\varphi \sin\vartheta \cos\vartheta \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\vec{e}_\varphi \times \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ könnte man als $\cos\vartheta \vec{e}_r - \sin\vartheta \vec{e}_\vartheta$ ausdrücken falls man nur Kugelkoordinaten möchte

ja!

$$12a) \quad \vec{e}_\rho = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$b) \quad \vec{r} = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z$$

c) Sei $\phi(\rho, \varphi, z)$ eine beliebige skalare Funktion. $\vec{\nabla} \phi = n_1 \vec{e}_\rho + n_2 \vec{e}_\varphi + n_3 \vec{e}_z$

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} dz = \vec{e}_\rho d\rho + \rho \vec{e}_\varphi d\varphi + \vec{e}_z dz$$

$$d\phi = \vec{\nabla} \phi \cdot d\vec{r}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz = n_1 d\rho + n_2 \rho d\varphi + n_3 dz$$

$$\Rightarrow n_1 = \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \quad n_2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \quad n_3 = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} = \vec{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \vec{e}_\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

$$d) \quad \vec{\nabla} \phi = \vec{e}_\rho \frac{\partial \phi}{\partial \rho} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} + \vec{e}_z \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

$$\text{Sei } \vec{A} = A_\rho \vec{e}_\rho + A_\varphi \vec{e}_\varphi + A_z \vec{e}_z$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = (\vec{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}) (A_\rho \vec{e}_\rho + A_\varphi \vec{e}_\varphi + A_z \vec{e}_z)$$

$$= \frac{\partial A_\rho}{\partial \rho} + \frac{A_\varphi}{\rho} + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \rho} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = (\vec{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}) \times (A_\rho \vec{e}_\rho + A_\varphi \vec{e}_\varphi + A_z \vec{e}_z)$$

$$= \frac{\partial A_\varphi}{\partial \rho} \vec{e}_z - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \vec{e}_\varphi$$

$$- \frac{\partial A_\rho}{\partial \rho} \vec{e}_z + \frac{A_\varphi}{\rho} \vec{e}_z + \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \vec{e}_\varphi$$

$$+ \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi - \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \vec{e}_\rho$$

/3 a)

$$V(\vec{r}) = \varphi$$

$$\vec{\nabla} V(\vec{r}) = \frac{1}{\rho} \vec{e}_\varphi \quad \checkmark$$

$$b) \quad \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} V) = \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\rho} \vec{e}_\varphi \right)$$

$$= -\frac{1}{\rho^2} \vec{e}_z + \frac{1}{\rho^2} \vec{e}_z - 0 = 0 \quad \checkmark$$

c)

$$\int_F [\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} V)] \cdot d\vec{f} \stackrel{\text{Stokes}}{=} \int_{\partial F} (\vec{\nabla} V) \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} d\vec{s}$$

$$\text{parametrisierung } z=0 \quad \rho=R \quad \varphi=t \quad \gamma(t) = \rho \vec{e}_\rho = R \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{R}{R} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi \quad \checkmark$$

Wobei Satz von Stokes hier nicht anwendbar ist,

da V bei $\vec{r}=0$ unstetig ist.

! bei $x=0$!

Deshalb ist V dort auch nicht differenzierbar.

d)

$$V(\vec{r}) = \rho \quad \checkmark$$

$$\vec{\nabla} V = \vec{e}_\rho \quad \checkmark$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} V) = 0 \quad \checkmark$$

$$\int_F \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} V) \cdot d\vec{f} = \int_{\partial F} \vec{\nabla} V \cdot d\vec{s}$$

$$\text{parametrisierung } z=0 \quad \rho=R \quad \varphi=t \quad \gamma(t) = \rho \vec{e}_\rho = R \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int_0^{2\pi} 0 dt = 0 \quad \checkmark$$

V ist in $\vec{r}=0$ nicht differenzierbar:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \vec{\nabla} V(z=0, \varphi=0, \rho) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \vec{\nabla} V(z=0, \varphi=\pi, \rho)$$

/ aber SuS gilt trotzdem!