

Klassische Theoretische Physik III WS 2020/2021

Prof. Dr. M. Garst
Dr. B. NarozhnyBlatt 2
Lösungen

1. Sphärische Koordinaten:

- (a) Berechnen Sie
- $\mathbf{e}_r$
- ,
- $\mathbf{e}_\vartheta$
- und
- $\mathbf{e}_\varphi$
- als Funktionen von
- r
- ,
- ϑ
- , und
- φ
- .

Zuerst drücken wir die Komponenten des Ortsvektors als Funktionen von r , ϑ und φ aus:

$$\mathbf{r} = r \sin \vartheta \cos \varphi \mathbf{e}_x + r \sin \vartheta \sin \varphi \mathbf{e}_y + r \cos \vartheta \mathbf{e}_z.$$

Dann finden wir laut der Definition

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_r &= \frac{\mathbf{r}}{r} = \sin \vartheta \cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \vartheta \sin \varphi \mathbf{e}_y + \cos \vartheta \mathbf{e}_z; \\ \mathbf{e}_\vartheta &= \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \vartheta} = \cos \vartheta \cos \varphi \mathbf{e}_x + \cos \vartheta \sin \varphi \mathbf{e}_y - \sin \vartheta \mathbf{e}_z; \\ \mathbf{e}_\varphi &= \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \varphi} = -\sin \varphi \mathbf{e}_x + \cos \varphi \mathbf{e}_y.\end{aligned}$$

- (b) Drücken Sie den Ortsvektor
- $\mathbf{r}$
- in der sphärischen Koordinatenbasis aus.

Laut Definition

$$\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r.$$

- (c) Drücken Sie den Nabla-Operator
- ∇
- in der sphärischen Koordinatenbasis aus. Beachten Sie, dass die Basisvektoren von Ort abhängen.

Es gibt keinen Nabla-Operator der in sphärischen Koordinaten "algebraisch wirken kann".

- (d) Drücken Sie den Gradienten, die Divergenz, und die Rotation eines Vektorfeldes in der sphärischen Koordinatenbasis aus.

Unabhängig vom verwendeten Koordinatensystem stehen die Gesamtdifferenz (df) und der Gradient (∇f) eines Skalarfeldes f in folgender Beziehung zueinander

$$df = \nabla f \cdot d\mathbf{r}.$$

Im kartesischen Koordinatensystem mit $f = f(x, y, z)$ erweitert sich diese Beziehung wie folgt

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = \nabla f \cdot (\mathbf{e}_x dx + \mathbf{e}_y dy + \mathbf{e}_z dz),$$

und zwar

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{e}_z.$$

Ähnlich in sphärischen Koordinaten mit $f = f(r, \vartheta, \varphi)$

$$df = \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial \vartheta} d\vartheta + \frac{\partial f}{\partial \varphi} d\varphi = \nabla f \cdot (\mathbf{e}_r dr + \mathbf{e}_\vartheta r d\vartheta + \mathbf{e}_\varphi r \sin \vartheta d\varphi),$$

und zwar

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \mathbf{e}_\vartheta + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi.$$

Um die Divergenz zu finden, verwenden wir der Gaußsche Integralsatz und integrieren über eine Fläche $\mathcal{S}$, die ein infinitesimales Volumenelement dV umschließt

$$\oint_{\mathcal{S}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \nabla \cdot \mathbf{A} dV.$$

In sphärischen Koordinaten gilt

$$dV = r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi.$$

Betrachten wir ein kubisches Volumenelement. In der radialen Richtung ist das Flächenelement im Punkt $\mathbf{r}$

$$d\mathbf{s} \rightarrow r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \mathbf{e}_r,$$

und zwar

$$\mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \rightarrow r^2 \sin \vartheta A_r d\vartheta d\varphi \mathbf{e}_r.$$

Benutzen wir nun die Definition der Ableitung

$$F(x + dx) - F(x) = \frac{dF}{dx} dx$$

und finden den Beitrag der beiden gegenüberliegenden Seiten in radialer Richtung (die Punkte $\mathbf{r}$ und $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$)

$$\oint_{\mathcal{S}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \rightarrow \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \vartheta A_r) dr d\vartheta d\varphi.$$

Ähnlich in der seitlichen Richtung ($\mathbf{e}_\vartheta$)

$$\mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \rightarrow A_\vartheta r \sin \vartheta dr d\varphi \mathbf{e}_\vartheta,$$

und in die Richtung $\mathbf{e}_\varphi$

$$\mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \rightarrow r A_\varphi dr d\vartheta \mathbf{e}_\varphi.$$

Infolgedessen finden wir den Wert des Integrals als

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \left[\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \vartheta A_r) + \frac{\partial}{\partial \vartheta} (r A_\vartheta \sin \vartheta) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (r A_\varphi) \right] dr d\vartheta d\varphi.$$

Vergleicht man dieses Ergebnis mit dem obigen Volumenelement, so zeigt sich die Divergenz in der Form

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial (r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial (A_\vartheta \sin \vartheta)}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}.$$

Um die Rotation zu finden, verwenden wir die infinitesimale Version des Stokes'schen Satzes

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}.$$

Hier berechnen wir das Linienintegral um die Infinitesimalschleife (wobei sich $d\mathbf{s}$ auf die Oberfläche der Schleife bezieht).

Betrachten wir ein infinitesimales Rechteck in der Ebene orthogonal zu $\mathbf{e}_\varphi$. Dann

$$d\mathbf{s} \rightarrow r dr d\vartheta \mathbf{e}_\varphi.$$

Das Linienelement in radialer Richtung ist

$$d\mathbf{l} \rightarrow dr \mathbf{e}_r,$$

sodass

$$\mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \rightarrow A_r dr.$$

In der seitlichen Richtung

$$d\mathbf{l} \rightarrow r d\vartheta \mathbf{e}_\vartheta,$$

sodass

$$\mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \rightarrow r A_\vartheta d\vartheta.$$

Insgesamt

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \rightarrow \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r A_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \vartheta} \right] \mathbf{e}_\varphi \cdot d\mathbf{s}.$$

Wenn wir dasselbe Argument für die beiden anderen Richtungen wiederholen, finden wir die Rotation als

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\frac{\partial (A_\varphi \sin \vartheta)}{\partial \vartheta} - \frac{\partial A_\vartheta}{\partial \varphi} \right] \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial (r A_\varphi)}{\partial r} \right] \mathbf{e}_\vartheta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r A_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \vartheta} \right] \mathbf{e}_\varphi.$$

2. Zylindrische Koordinaten:

Wiederholen Sie die Aufgabe 1 für die zylindrische Koordinaten.

Die Berechnung in den Zylinderkoordinaten ist genau die gleiche wie in den Kugelkoordinaten. Folglich geben wir nur die Ergebnisse an.

- (a) *Berechnen Sie $\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_\varphi$ und $\mathbf{e}_z$ als Funktionen von ρ , φ , und z .*

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_\rho &= \cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \varphi \mathbf{e}_y, \\ \mathbf{e}_\varphi &= -\sin \varphi \mathbf{e}_x + \cos \varphi \mathbf{e}_y, \\ \mathbf{e}_z &= \mathbf{e}_z.\end{aligned}$$

- (b) *Drücken Sie den Ortsvektor $\mathbf{r}$ in der zylindrischen Koordinatenbasis aus.*

$$\mathbf{r} = \rho \mathbf{e}_\rho + z \mathbf{e}_z.$$

- (c) *Drücken Sie den Nabla-Operator ∇ in der zylindrischen Koordinatenbasis aus. Beachten Sie, dass die Basisvektoren von Ort abhängen.*

Es gibt keinen Nabla-Operator der in sphärischen Koordinaten “algebraisch wirken kann”.

- (d) *Drücken Sie den Gradienten, die Divergenz, und die Rotation eines Vektorfeldes in der zylindrischen Koordinatenbasis aus.*

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{e}_z.$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right] \mathbf{e}_\rho + \left[\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right] \mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \right] \mathbf{e}_z.$$

3. Vektoranalysis:

Betrachten Sie Zylinderkoordinaten. Es sei ein skalares Feld gegeben

$$V(\mathbf{r}) = \varphi,$$

mit dem Winkel φ .

- (a) Berechnen Sie den Gradienten ∇V .

$$\nabla V = \frac{1}{\rho} \mathbf{e}_\varphi.$$

- (b) Berechnen Sie die Rotation des Gradienten $\nabla \times (\nabla V)$ für alle endliche Abstände $\rho > 0$ von der z -Achse.

$$\nabla \times (\nabla V) = \left[-\frac{\partial(1/\rho)}{\partial z} \right] \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial(\rho/\rho)}{\partial \rho} \right] \mathbf{e}_z = 0.$$

- (c) Betrachten Sie das Flächenintegral

$$\int_{\mathcal{F}} d\mathbf{f} \cdot \nabla \times (\nabla V)$$

über einen Kreis $\mathcal{F}$ mit Radius R innerhalb der (xy) -Ebene zentriert um $z = 0$. Bestimmen Sie den Wert des Integrals mithilfe des Stokes'schen Satzes. Ist V zweimal differenzierbar?

$$\int_{\mathcal{F}} d\mathbf{f} \cdot \nabla \times (\nabla V) = \oint \nabla V \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{R} \int_0^{2\pi} R d\varphi = 2\pi.$$

Fazit: $V = \varphi$ ist nicht zweimal differenzierbar!

- (d) Wiederholen Sie die Rechnung mit

$$V(\mathbf{r}) = \rho,$$

mit dem Abstand zur z -Achse ρ . Ist dieses skalare Feld zweimal differenzierbar?

Hier

$$\nabla V = \mathbf{e}_\rho,$$

$$\nabla \times (\nabla V) = 0,$$

$$\int_{\mathcal{F}} d\mathbf{f} \cdot \nabla \times (\nabla V) = \oint \mathbf{e}_\rho \cdot d\mathbf{l} = 0.$$

Fazit: $V = \rho$ ist zweimal differenzierbar!