

Blatt 3 Tobias Abgabe

Donnerstag, 19. November 2020 13:11

100/100

$$1/1 \quad \frac{F_c}{F_g} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r^2} \left(G \frac{m^2}{r^2} \right)^{-1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 G} \frac{q^2}{m^2}$$

Elektron: $q_e = 1.602 \cdot 10^{-19} \quad m_e = 9.109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$

$$\Rightarrow \frac{F_c}{F_g} = 4.166 \cdot 10^{42} \quad \checkmark$$

Proton: $|q_p| = |q_e| \quad m_p = 1.673 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

$$\Rightarrow \frac{F_c}{F_g} = 1.236 \cdot 10^{36} \quad \checkmark$$

Sei $\frac{F_c}{F_g} = 1$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0 G} \frac{q^2}{m^2} = 1 \Rightarrow \frac{q}{m} = \sqrt{4\pi\epsilon_0 G} \quad \checkmark$$

1/2 a) $\rho(\vec{r}) = \sigma \delta(z) \Theta(R-r)$

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\begin{aligned} \phi\left(\frac{0}{z}\right) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \int_0^R \sigma \delta(z') \Theta(R-r') \frac{1}{\left|\frac{0}{z} - \begin{pmatrix} r' \cos \varphi' \\ r' \sin \varphi' \\ z' \end{pmatrix}\right|} r' dr' dz' d\varphi' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^R \sigma \frac{1}{\left|\frac{0}{z} - \begin{pmatrix} r' \cos \varphi' \\ r' \sin \varphi' \\ 0 \end{pmatrix}\right|} r' dr' d\varphi' \\ &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{1}{\sqrt{r'^2 \cos^2 \varphi' + r'^2 \sin^2 \varphi' + z^2}} r' dr' d\varphi' \\ &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{r'}{\sqrt{r'^2 + z^2}} dr' d\varphi' \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r'}{\sqrt{r'^2 + z^2}} dr' \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{r'^2 + z^2} \right]_0^R \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{R^2 + z^2} - |z| \right) \quad \checkmark \end{aligned}$$

1/b) $E\left(\frac{0}{z}\right) = -\text{grad } \varphi\left(\frac{0}{z}\right) \quad \left| \text{Aufgrund der Rotationssymmetrie von } \varphi \right.$
 $\vec{E}(z) = -\frac{\partial \varphi\left(\frac{0}{z}\right)}{\partial z} \vec{e}_z \quad \left| \text{ist } E_z\left(\frac{0}{z}\right) \vec{e}_z = \vec{E}\left(\frac{0}{z}\right) \equiv \vec{E}(z) \right.$

$$= -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} - \frac{z}{|z|} \right) \vec{e}_z$$

$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(-\frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} + \frac{z}{|z|} \right) \vec{e}_z \quad \checkmark$$

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} |E_z\left(\frac{0}{z}\right)| = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (0+1) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad \checkmark$$

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} |E_z\left(\frac{0}{z}\right)| = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (0-1) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad \checkmark$$

Spring ist also die Differenz der Grenzwerte: $\frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad \checkmark$

c)

$$\vec{E}(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) \vec{e}_z$$

$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{z^2} \sqrt{1 + \frac{R^2}{z^2}}} \right) \vec{e}_z$$

Da $\frac{R^2}{z^2}$ sehr klein wird lässt sich $\sqrt{1 + \frac{R^2}{z^2}}$ auf die ersten beiden Terme der Taylorentwicklung um $\frac{R^2}{z^2} = 0$ nähern:

$$\sqrt{1 + \frac{R^2}{z^2}} \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{R^2}{z^2}$$

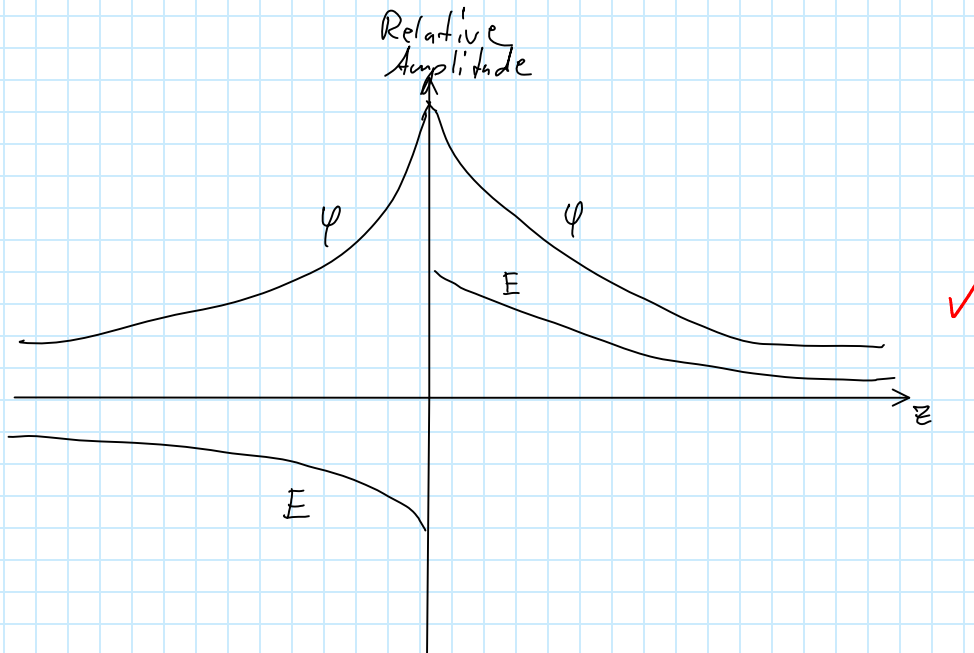
$$\Rightarrow \vec{E}(z) = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0 |z|} \left(1 - \left(1 + \frac{1}{2} \frac{R^2}{z^2} \right) \right) \vec{e}_z$$

$$= \frac{\sigma R^2}{4\epsilon_0} \frac{1}{z^2} \frac{z}{|z|} \vec{e}_z$$

Zum Vergleich mit der Punktladung wird σ eingesetzt:

$$\vec{E}(z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{z^2} \frac{z}{|z|} \vec{e}_z$$

Das Feld dieser Scheibe verhält sich also für $z \gg R$ wie das einer Punktladung in (8) ✓



Vorzeichenwechsel von E bedeutet Richtungsänderung des $\vec{E}$ Vektors

e)

$$|\vec{E}(z)| = \left| \underbrace{\frac{\sigma}{2\epsilon_0}}_{\rightarrow \frac{\sigma}{2\epsilon_0}} \left(\underbrace{\frac{z}{|z|}}_0 - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}} \right) \right| \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \Rightarrow \vec{E}(z) = \begin{cases} -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z & z < 0 \\ \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z & z > 0 \end{cases} \quad \checkmark$$

Kontrolle mit Satz von Gauß:

$$\begin{aligned} \int E df &= \frac{Q}{\epsilon_0} \\ 2\pi R^2 E &= \frac{\sigma \pi R^2}{\epsilon_0} \quad \left| \text{Da } R \rightarrow \infty \text{ kann man} \right. \\ &\quad \left. \text{zweimal die Kreisfläche ohne Grenzfällen} \right. \\ &\quad \left. \text{als Integrationsfläche wählen} \right. \quad \checkmark \\ E &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad \checkmark \end{aligned}$$

Ergebnisse stimmen überein $\checkmark$

3a)

$$\sigma_a = \frac{Q}{2\pi a l} \quad \sigma_b = \frac{-Q}{2\pi b l} \quad \checkmark$$

b) Das E-Feld ist auf gleichem Radius homogen.
 $\Rightarrow$ Satz von Gauß

Es gilt aufgrund der Symmetrie $\vec{E} = E \vec{e}_r$

} gilt für $l \gg a, b$

$$\int_F E df = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^r \int_0^L \{ \sigma_a \delta(r'-a) + \sigma_b \delta(r'-b) \} r' dr' dz d\varphi$$

$$2\pi r l E = \frac{2\pi l}{\epsilon_0} \left\{ \int_0^r \sigma_a \delta(r'-a) r' dr' + \int_0^r \sigma_b \delta(r'-b) r' dr' \right\}$$

$$E = \frac{1}{r \epsilon_0} \cdot \begin{cases} 0 & r < a \\ a \cdot \sigma_a & a \leq r < b \\ a \cdot \sigma_a + b \cdot \sigma_b & b \leq r \end{cases}$$

$$= \frac{1}{r \epsilon_0} \frac{Q}{2\pi l} \cdot \begin{cases} 0 & r < a \\ 1 & a \leq r < b \\ 0 & b \leq r \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 r l} \vec{e}_r \quad \text{falls } a \leq r < b$$

$$\vec{E} = 0 \quad \text{sonst} \quad \checkmark$$

Wobei sich $\frac{Q}{l}$ wie eine spezifische Ladung interpretieren lässt.

$$c) \quad \vec{E} = -\text{grad } \varphi$$

$$\varphi(r) = - \int_b^r \vec{E} \cdot d\vec{r}'$$

$$= - \int_b^r E(r') \Theta(r'-r) dr' - \int_b^a E(r') \Theta(r'-r) dr' - \int_a^0 E(r') \Theta(r'-r) dr'$$

$$= 0 - \int_b^a \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \Theta(r'-r) dr' - 0$$

$$= -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \int_b^a \frac{1}{r'} \Theta(r'-r) dr'$$

$$\text{Fall } b < r: \varphi(r) = 0$$

$$\text{Fall } a < r \leq b: \varphi(r) = -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \left[\ln(r') \right]_b^r = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln\left(\frac{b}{r}\right)$$

$$\text{Fall } r \leq a: \varphi(r) = -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \left[\ln(r') \right]_b^a = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

