Klassische Theoretische Physik III WS 2020/2021

Prof. Dr. M. Garst
Dr. B. Narozhny

Blatt 4
Abgabe 27.11.2020, Besprechung 01-02.12.2020

---

1. Kapazität I: (40 Punkte)

Ein einfacher Kondensator besteht aus zwei benachbarten, voneinander isolierten Leitern. Wenn Ladungen gleicher Stärke, aber entgegengesetzten Vorzeichens aufgebracht werden (Q und $-Q$), herrscht eine bestimmte Potentialdifferenz zwischen ihnen. Das Verhältnis des Betrags der Ladung Q und des Betrags der Potentialdifferenz $U = |\Phi_1 - \Phi_2|$ wird Kapazität C genannt: $C = Q/U$.

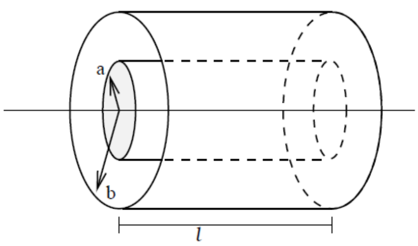
(a) Drücken Sie C durch C_{ij} aus, wobei C_{ij} die Kapazitätsmatrix ist (siehe Vorlesung)

$$Q_i = \sum_{j=1}^{2} C_{ij}\Phi_j, \qquad i = 1, 2.$$

(b) Die Einheit der Kapazität in SI-Einheiten ist Farad, $1\,\mathrm{F} = 1\,\mathrm{C}/1\,\mathrm{V}$. In welcher Einheit werden Kapazitäten im Gauß'schen System gemessen?

(c) Berechnen Sie die Kapazität pro Längeneinheit eines langen Zylinderkondensators. Die innere metallische Elektrode mit Radius a trägt die Ladung Q pro Längenelement l. Ein Metallblech mit Radius b umgibt den inneren Zylinder konzentrisch und trägt die Ladung $-Q$ pro Längenelement.

1. Bestimmen Sie die Energie W pro Längenelement in dem Kondensator durch das Volumenintegral einmal über $\vec{E}^2(\vec{r})$ und einmal über $\rho(\vec{r})\Phi(\vec{r})$.
2. Geben Sie die Kapazität des Kondensators pro Längeneinheit an.
3. Wie groß ist der Radius b des äußeren Leiters eines luftgefüllten Koaxialkabels, dessen zentral gelegener Leiter ein zylindrisches Kabel mit dem Radius $a = 0.5\,\mathrm{mm}$ ist, und dessen Kapazität pro Längeneinheit $3 \times 10^{11}\,\mathrm{F/m}$ ist?



(d) Berechnen Sie die Kapazität C folgender Kondensatoren:

1. zwei große ebene, leitende Flächen der Größe A im Abstand d zueinander (Inhomogenitäten des Randfeldes können vernachlässigt werden)
2. zwei konzentrische leitende Kugelschalen mit infinitesimaler Dicke und mit den Radien a, b, mit $b > a$

2. Greensche Funktion: (30 Punkten)

Betrachten Sie die elektrostatischen Greenschen Funktionen für Dirichlet- und von Neumann-Randbedingungen an der Oberfläche S, die das Volumen V begrenzt. Verwenden Sie den Greenschen Satz (hier $\partial/\partial n$ die Normalenableitung an der Oberfläche S ist – von innen nach außen gerichtet)

$$\int_V d^3y \left(\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi\right) = \oint_S da \left[\phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n}\right],$$

mit $\phi = G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, $\psi = G(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y})$ sodass

$$\nabla_y^2 G(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \delta(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{y}).$$

(a) Finden Sie die Differenz

$$G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') - G(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x})$$

als ein Integral über die Grenzfläche S.

(b) Zeigen Sie für die Dirichlet-Randbedingungen für das Potential und die zugehörige Randbedingung für die Greenschen Funktion, dass $G_D(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$ symmetrisch sein muss in $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{x}'$.

(c) Betrachten Sie von Neumann-Randbedingungen. Für die Greenschen Funktion gilt

$$\frac{\partial G_N}{\partial n} = -\frac{1}{\epsilon_0 S}, \qquad \boldsymbol{x}' \in S.$$

Zeigen Sie, dass die Funktion $G_N(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$ nicht symmetrisch sein muss. Zeigen Sie, dass die folgende Funktion symmetrisch ist

$$G_N(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') - F(\boldsymbol{x}), \qquad F(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{S} \oint_S da_y G_N(\boldsymbol{x}, , \boldsymbol{y}).$$

(d) Zeigen Sie, dass das Hinzufügen von $F(\boldsymbol{x})$ zur Greenschen Funktion hier keine Auswirkungen auf das Potenzial hat.

3. Kapazität II: (30 Punkte)

Ein Volumen V im Vakuum wird durch eine Oberfläche S begrenzt, die aus mehreren separaten leitenden Oberflächen S_j besteht. Ein Leiter wird auf einem endlichen Potential $\Phi = \Phi_0 \neq 0$ gehalten und alle anderen Leitern auf Potential $\Phi = 0$.

(a) Zeigen Sie, dass die Kapazität des einen Leiters gegeben ist durch

$$C = \epsilon_0 \int_V d^3x |\boldsymbol{\nabla}\Phi|^2,$$

wobei $\Phi(\boldsymbol{x})$ die Lösung für das Potential ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Kapazität C immer kleiner oder gleich der Größe ist

$$C_\Psi = \epsilon_0 \int_V d^3x |\boldsymbol{\nabla}\Psi|^2,$$

wobei $\Psi(\boldsymbol{x})$ eine beliebige Funktion ist, die die Randbedingungen auf den Leitern erfüllt. Dies ist ein Variationsprinzip für die Kapazität, die eine Oberschranke ergibt.