

Klassische Theoretische Physik III WS 2020/2021

Prof. Dr. M. Garst
Dr. B. NarozhnyBlatt 4
Lösungen

1. Kapazität I:

Ein einfacher Kondensator besteht aus zwei benachbarten, voneinander isolierten Leitern. Wenn Ladungen gleicher Stärke, aber entgegengesetzten Vorzeichens aufgebracht werden (Q und $-Q$), herrscht eine bestimmte Potentialdifferenz zwischen ihnen. Das Verhältnis des Betrags der Ladung Q und des Betrags der Potentialdifferenz $U = |\Phi_1 - \Phi_2|$ wird Kapazität C genannt: $C = Q/U$.

(a) Drücken Sie C durch C_{ij} aus, wobei C_{ij} die Kapazitätsmatrix ist (siehe Vorlesung)

$$Q_i = \sum_{j=1}^2 C_{ij} \Phi_j, \quad i = 1, 2.$$

Wie nehmen an, dass $\det C_{ij} \neq 0$. Dann

$$\Phi_i = \sum_j C_{ij}^{-1} Q_j.$$

Für den Kondensator gilt

$$Q_1 = Q, \quad Q_2 = -Q,$$

sodass

$$\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} = Q \hat{C}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{Q}{\det C_{ij}} \begin{pmatrix} C_{22} + C_{12} \\ -C_{11} - C_{21} \end{pmatrix}.$$

Da

$$U = |\Phi_1 - \Phi_2| = \frac{Q}{\det C_{ij}} (C_{22} + C_{12} + C_{11} + C_{21}),$$

es folgt

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{|\det C_{ij}|}{|C_{22} + C_{12} + C_{11} + C_{21}|} = \frac{|C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21}|}{|C_{11} + C_{12} + C_{21} + C_{22}|} = \frac{|\det C_{ij}|}{|\sum_{ij} C_{ij}|}.$$

- (b) Die Einheit der Kapazität in SI-Einheiten ist Farad, $1 F = 1 C/1 V$. In welcher Einheit werden Kapazitäten im Gauß'schen System gemessen?

$$[C] = \frac{[Q]}{[\Phi]} = \frac{\text{esu}}{\text{erg/esu}} = \frac{\frac{\text{g cm}^3}{\text{s}^2}}{\frac{\text{g cm}^2}{\text{s}^2}} = \text{cm}$$

- (c) Berechnen Sie die Kapazität pro Längeneinheit eines langen Zylinderkondensators. Die innere metallische Elektrode mit Radius a trägt die Ladung Q pro Längenelement l . Ein Metallblech mit Radius b umgibt den inneren Zylinder konzentrisch und trägt die Ladung $-Q$ pro Längenelement.

Von Blatt 3:

$$E_r(r) = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \right) \frac{2Q}{rl} \theta(r-a) \theta(b-r),$$

$$\Phi(r) = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \right) \left[-\frac{2Q}{l} \ln \frac{r}{b} \theta(r-a) \theta(b-r) - \frac{2Q}{l} \ln \frac{a}{b} \theta(a-r) \right].$$

1. Bestimmen Sie die Energie W pro Längenelement in dem Kondensator durch das Volumenintegral einmal über $\vec{E}^2(\vec{r})$ und einmal über $\rho(\vec{r})\Phi(\vec{r})$.

$$W = \frac{1}{8\pi} \int d^3x |\vec{E}|^2 = \frac{l}{4} \int_a^b dr r \left(\frac{2Q}{rl} \right)^2 = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \right) \frac{Q^2}{l} \ln b/a.$$

Alternativ

$$W = \frac{1}{2} \int d^3x \rho(\vec{x}) \Phi(\vec{x}) = \pi l \frac{2Q}{l} \sigma_b \ln b/a = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \right) \frac{Q^2}{l} \ln b/a.$$

2. Geben Sie die Kapazität des Kondensators pro Längeneinheit an.

$$U = \Phi(a) - \Phi(b) = \frac{2Q}{l} \ln b/a$$

und folglich

$$C = \left(4\pi\epsilon_0 \times \right) \frac{l}{2 \ln b/a}.$$

3. Wie groß ist der Radius b des äußeren Leiters eines luftgefüllten Koaxialkabels, dessen zentral gelegener Leiter ein zylindrisches Kabel mit dem Radius $a = 0.5 \text{ mm}$ ist, und dessen Kapazität pro Längeneinheit $3 \times 10^{11} \text{ F/m}$ ist?

$$b = ae^{\frac{2\pi\epsilon_0}{C/l}} = 3.2 \text{ mm}.$$

(d) Berechnen Sie die Kapazität C folgender Kondensatoren:

Wir nehmen Gesamtladungen von $\pm Q$ wobei $Q > 0$ an.

1. zwei große ebene, leitende Flächen der Größe A im Abstand d zueinander (Inhomogenitäten des Randfeldes können vernachlässigt werden)

Wir wählen quaderförmige Integrationsvolumina die keine, eine bzw. beide Platten einschließen und finden

$$E_z(z) = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \right) \frac{4\pi Q}{A} \theta(z) \theta(d-z),$$

wobei die Platte mit Ladungsdichte Q/A ($-Q/A$) im gewählten Koordinatensystem bei $z = 0$ ($z = d$) ist.

Folglich ist $U = \frac{4\pi Q}{A} d$ und

$$C = (4\pi\epsilon_0 \times) \frac{A}{4\pi d}$$

2. zwei konzentrische leitende Kugelschalen mit infinitesimaler Dicke und mit den Radien a , b , mit $b > a$

Die Anwendung des Gauß'schen Satzes mit kugelförmigen Integrationsvolumen-satz liefert

$$r^2 E_r(r) = Q \theta(a-r) \theta(b-r).$$

Folglich ist

$$U = \left| - \int_a^b E_r(r) \right| = Q \frac{b-a}{ab},$$

und

$$C = (4\pi\epsilon_0 \times) \frac{ab}{b-a}.$$

2. Greensche Funktion:

Betrachten Sie die elektrostatischen Greenschen Funktionen für Dirichlet- und von Neumann-Randbedingungen an der Oberfläche S , die das Volumen V begrenzt. Verwenden Sie den Greenschen Satz (hier $\partial/\partial n$ die Normalenableitung an der Oberfläche S ist – von innen nach außen gerichtet)

$$\int_V d^3y (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) = \oint_S da \left[\phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right],$$

mit $\phi = G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\psi = G(\mathbf{x}', \mathbf{y})$ sodass

$$\nabla_y^2 G(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \delta(\mathbf{z} - \mathbf{y}).$$

(a) Finden Sie die Differenz

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') - G(\mathbf{x}', \mathbf{x})$$

als ein Integral über die Grenzfläche S .

Wir benutzen den Greenschen Satz wie angegeben

$$\begin{aligned} \int_V d^3y [G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \nabla_y^2 G(\mathbf{x}', \mathbf{y}) - G(\mathbf{x}', \mathbf{y}) \nabla_y^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{y})] = \\ = \oint_S da_y \left[G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial G(\mathbf{x}', \mathbf{y})}{\partial n_y} - G(\mathbf{x}', \mathbf{y}) \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n_y} \right]. \end{aligned}$$

Da

$$\nabla_y^2 G(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \delta(\mathbf{z} - \mathbf{y}),$$

es folgt

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') - G(\mathbf{x}', \mathbf{x}) = \epsilon_0 \oint_S da_y \left[G(\mathbf{x}', \mathbf{y}) \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n_y} - G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial G(\mathbf{x}', \mathbf{y})}{\partial n_y} \right]. \quad (1)$$

(b) Zeigen Sie für die Dirichlet-Randbedingungen für das Potential und die zugehörige Randbedingung für die Greenschen Funktion, dass $G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ symmetrisch sein muss in $\mathbf{x}$ und $\mathbf{x}'$.

Da für die Dirichlet-Randbedingungen

$$G_D(\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S) = 0,$$

verschwindet das Integral in der rechten Seite von (1). Es folgt gerade

$$G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = G_D(\mathbf{x}', \mathbf{x}).$$

(c) Betrachten Sie von Neumann-Randbedingungen. Für die Greenschen Funktion gilt

$$\frac{\partial G_N(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial n'} = -\frac{1}{\epsilon_0 S}, \quad \mathbf{x}' \in S.$$

Zeigen Sie, dass die Funktion $G_N(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ nicht symmetrisch sein muss. Zeigen Sie, dass die folgende Funktion symmetrisch ist

$$G_N(\mathbf{x}, \mathbf{x}') - F(\mathbf{x}), \quad F(\mathbf{x}) = \frac{1}{S} \oint_S da_y G_N(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Wir benutzen die obigen von Neumann-Randbedingung in der rechten Seite von (1):

$$\text{RHS} = \frac{1}{S} \oint_S da_y [G_N(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - G_N(\mathbf{x}', \mathbf{y})] = F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{x}').$$

Jetzt führen wir die neue Funktion ein

$$\mathcal{G}_N(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \equiv G_N(\mathbf{x}, \mathbf{x}') - F(\mathbf{x}).$$

Es folgt von (1)

$$\mathcal{G}_N(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \mathcal{G}_N(\mathbf{x}', \mathbf{x}).$$

(d) Zeigen Sie, dass das Hinzufügen von $F(\mathbf{x})$ zur Greenschen Funktion hier keine Auswirkungen auf das Potenzial hat.

Mit Hilfe der Greenschen Funktion G_N ist das Potential gegeben durch

$$\Phi(\mathbf{x}) = \langle \Phi \rangle_S + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3x' \rho(\mathbf{x}') G_N(\mathbf{x}, \mathbf{x}') + \frac{1}{4\pi} \oint_S da' \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}')}{\partial n'} G_N(\mathbf{x}, \mathbf{x}').$$

Wir führen jetzt das "neuen" Potential

$$\varphi(\mathbf{x}) = \langle \Phi \rangle_S + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3x' \rho(\mathbf{x}') \mathcal{G}_N(\mathbf{x}, \mathbf{x}') + \frac{1}{4\pi} \oint_S da' \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}')}{\partial n'} \mathcal{G}_N(\mathbf{x}, \mathbf{x}'),$$

und zeigen dass die beide äquivalent sind

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x}) &= \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3x' \rho(\mathbf{x}') [G_N(\mathbf{x}, \mathbf{x}') - \mathcal{G}_N(\mathbf{x}, \mathbf{x}')] + \frac{1}{4\pi} \oint_S da' \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}')}{\partial n'} [G_N(\mathbf{x}, \mathbf{x}') - \mathcal{G}_N(\mathbf{x}, \mathbf{x}')] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3x' \rho(\mathbf{x}') F(\mathbf{x}) + \frac{1}{4\pi} \oint_S da' \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}')}{\partial n'} F(\mathbf{x}) \\ &= \frac{F(\mathbf{x})}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_V d^3x' \rho(\mathbf{x}') + \epsilon_0 \oint_S da' \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}')}{\partial n'} \right] \\ &= \frac{F(\mathbf{x})}{4\pi\epsilon_0} \left[q_V - \epsilon_0 \oint_S da' \mathbf{E}(\mathbf{x}') \cdot \mathbf{e}'_n \right] = 0. \end{aligned}$$

Hier haben wir die Beziehung zwischen dem Feld und dem Potenzial genutzt

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_n = -\mathbf{e}_n \cdot \nabla \Phi = -\frac{\partial \Phi}{\partial n}.$$

Der letzte Schritt ist nur der Gaußschen Satz.

Wir haben also gezeigt, dass die Hinzufügung von $F(\mathbf{x})$ die Lösung unverändert lässt. Dies zeigt, dass wir G_N immer durch entsprechende Modifikation mit F symmetrisch machen können.

3. Kapazität II:

Ein Volumen V im Vakuum wird durch eine Oberfläche S begrenzt, die aus mehreren separaten leitenden Oberflächen S_j besteht. Ein Leiter wird auf einem endlichen Potential $\Phi = \Phi_0 \neq 0$ gehalten und alle anderen Leitern auf Potential $\Phi = 0$.

(a) *Zeigen Sie, dass die Kapazität des einen Leiters gegeben ist durch*

$$C = \epsilon_0 \int_V d^3x |\nabla \Phi|^2,$$

wobei $\Phi(\mathbf{x})$ die Lösung für das Potential ist.

Wir unterscheiden die N leitenden Oberflächen und ihre Ladungen durch einen Index j . Für den Leiter mit dem Potential ungleich Null wählen wir $j = k$. Dann

$$\begin{aligned} \int_V d^3x |\nabla \Phi|^2 &= - \int_V d^3x \Phi \nabla^2 \Phi + \oint_S da \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} \\ &= \sum_{j=1}^N \Phi_j \oint_{S_j} da \frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{j=1}^N \Phi_j \oint_{S_j} da \sigma \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \Phi_k \oint_{S_k} da \sigma = \frac{1}{\epsilon_0} \Phi_0 Q_0. \end{aligned}$$

Da

$$\Phi Q = C \Phi^2,$$

wir wählen $\Phi_0 = 1$ und finden

$$C = \epsilon_0 \int_V d^3x |\nabla \Phi|^2,$$

(b) Zeigen Sie, dass die Kapazität C immer kleiner oder gleich der Größe ist

$$C_{\Psi} = \epsilon_0 \int_V d^3x |\nabla \Psi|^2,$$

wobei $\Psi(\mathbf{x})$ eine beliebige Funktion ist, die die Randbedingungen auf den Leitern erfüllt. Dies ist ein Variationsprinzip für die Kapazität, die eine Oberschranke ergibt.

Wir führen die Differenz ein

$$\Psi - \Phi = \delta\psi,$$

wobei Φ das richtige Potential ist und $\delta\psi = 0$ auf alle Oberflächen S_j . Dann

$$\begin{aligned} \int_V d^3x |\nabla \Psi|^2 &= \\ &= \int_V d^3x |\nabla \Phi|^2 + 2 \int_V d^3x \nabla \Phi \cdot \nabla \delta\psi + \int_V d^3x |\nabla \delta\psi|^2 \\ &= \frac{C}{\epsilon_0} - 2 \int_V d^3x \delta\psi \nabla^2 \Phi + 2 \oint_S da \delta\psi \frac{\partial \Phi}{\partial n} + \int_V d^3x |\nabla \delta\psi|^2 \\ &= \frac{C}{\epsilon_0} + \alpha, \end{aligned}$$

wobei

$$\alpha = \int_V d^3x |\nabla \delta\psi|^2 \geq 0.$$