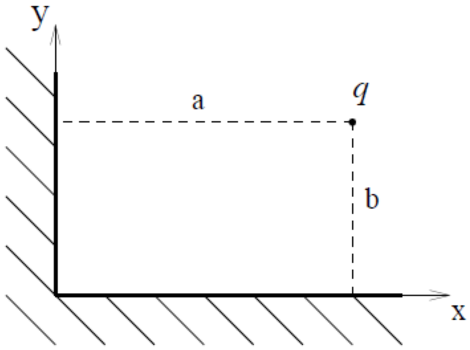
Klassische Theoretische Physik III WS 2020/2021

Prof. Dr. M. Garst | **Blatt 5**
Dr. B. Narozhny | **Abgabe 04.12.2020, Besprechung 08-09.12.2020**

---

1. Leiterecke: (30 Punkte)

Eine Ladung q befindet sich im Abstand a bzw. b von senkrecht zueinander stehenden, unendlich ausgedehnten, leitenden, geerdeten Ebenen, dargestellt in unterer Skizze.



(a) Wo liegen die Spiegelladungen und wie groß sind sie?

(b) Überprüfen Sie explizit, dass ihre Anordnung die Randbedingungen $\Phi(0, y, z) = \Phi(x, 0, z) = 0$ erfüllt.

(c) Berechnen Sie das elektrische Feld auf den Oberflächen. Skizzieren Sie das Feldlinienbild.

(d) Berechnen und skizzieren Sie die Oberflächenladungsdichte σ.

(e) Berechnen Sie die gesamte Influenzladung in jeder der beiden Halbebenen

(f) Welche Kraft wirkt auf die Ladung?

(g) Untersuchen Sie das Potential für große Abstände $|\vec{r}| \gg a, b$ von der Ladung.

2. Leitende Kugel: (30 Punkten)

Betrachten Sie eine geerdete, leitende Kugel K_R mit Potential $\Phi = 0$ und Radius R

$$K_R = \left\{ r \in \mathbb{R}^3 : |\boldsymbol{r}| < R \right\}.$$

Am Punkt $\mathbf{r}_q = (0, 0, a)$ mit $a > R$ befindet sich eine Punktladung q.

(a) Berechnen Sie das Potential im gesamten Raum mit Hilfe einer Bildladung innerhalb der Kugel.

(b) Leiten Sie daraus das elektrische Feld **E** auf der Oberfläche her. Zeigen Sie dabei, dass das elektrische Feld senkrecht auf der Oberfläche der Kugel steht.

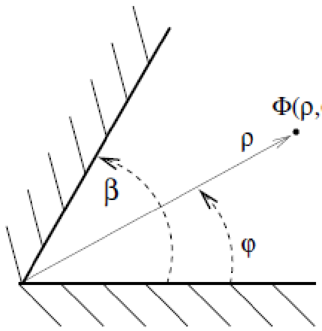
(c) Welche Kraft wirkt auf die Ladung?

(d) Berechnen Sie die auf der Oberfläche der Kugel induzierte Flächenladungsdichte σ. Zeigen Sie, dass die gesamte, auf der Oberfläche induzierte Ladung genau der Spiegelladung entspricht.

(e) Wie ändert sich die Lösung, wenn die Kugeloberfläche auf dem Potential Φ_0 liegt? Zeigen Sie, dass man die Lösung mit Hilfe einer weiteren Punktladung im Zentrum der Kugel erhält.

3. Zylinderkoordinaten: (40 Punkte)

Betrachten Sie eine Ecke aus zwei leitenden, unendlich ausgedehnten, geerdeten Ebenen.



(a) Schreiben Sie die Laplace-Gleichung in Zylinderkoordinaten.

(b) Zeigen Sie, dass alle Lösungen der Laplace-Gleichung mit den obengenannten Randbedingungen unabhängig von z sind.

(c) Verwenden Sie den Separationsansatz

$$\Phi(r, \varphi) = R(r)S(\varphi),$$

und reduzieren Sie die Laplace-Gleichung auf zwei Differentialgleichungen für jeweils $R(r)$ und $S(\varphi)$.

(d) Zeigen Sie, dass die allgemeine Lösung der Laplace-Gleichung mit der Randbedingung eines verschwindenden Potentials auf den Oberflächen die folgende Form annimmt:

$$\Phi(r, \varphi) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m r^{m\pi/\beta} \sin\left(\frac{m\pi}{\beta}\varphi\right).$$

(e) Zeigen Sie, dass die Funktionen $\sin(m\pi\varphi/\beta)$ ein vollständiges Orthonormalsystem formen (unter Betrachtung der Randbedingungen). Finden Sie die entsprechenden Normierungskonstanten.

(f) In der Vorlesung haben sie das Theorem kennengelernt, welches die Eindeutigkeit des Dirichletproblems sicherstellt. Hier erfüllt die triviale Lösung $\Phi = 0$ die Laplace-Gleichung und zugleich die Randbedingungen. Gibt es hier einen Widerspruch mit der Lösung $\Phi(r, \varphi)$ [siehe Aufgabe (d)]?