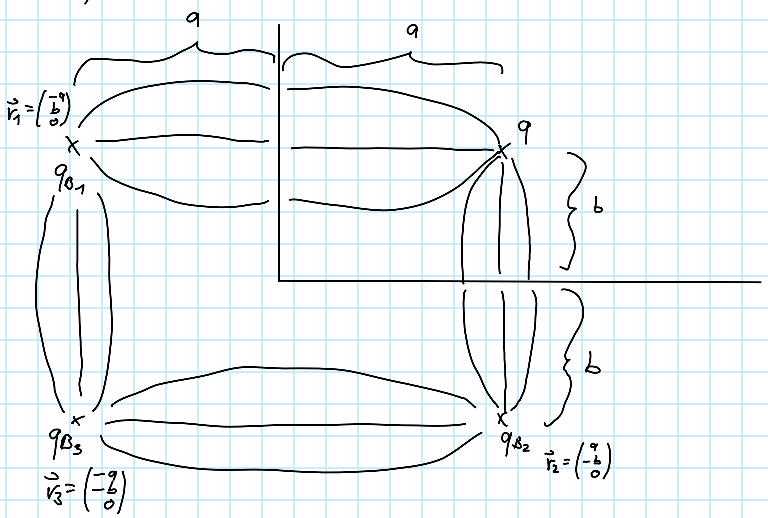
Blatt 5 Abgabe Tobias

Mittwoch, 2. Dezember 2020 18:47

90

/1a)



Die Positionen der Spiegelladungen ergeben sich aus der Symmetrie, da sonst die Feldlinien nicht senkrecht auf der Oberfläche liegen können.

Um komplette Symmetrie zu erreichen muss $q = q_{B_3} = -q_{B_1} = -q_{B_2}$ gelten.

✓

b)

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+z^2}} + \frac{q}{\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2+z^2}} + \frac{-q}{\sqrt{(x+a)^2+(y-b)^2+z^2}} + \frac{-q}{\sqrt{(x-a)^2+(y+b)^2+z^2}}\right]$$

Nun muss das Potential auf den beiden Flächen 0 sein

bedeutet $\varphi\left(\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = 0$ für $y \geq 0$ aufgrund der Symmetrie zur Winkelhalbierenden gilt sogar: $\varphi\left(\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = 0$ und $\varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix}\right) = 0$

für 1.Platte $x=0$: $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{\sqrt{a^2+(y-b)^2+z^2}} + \frac{q}{\sqrt{a^2+(y+b)^2+z^2}} - \frac{q}{\sqrt{a^2+(y-b)^2+z^2}} - \frac{q}{\sqrt{a^2+(y-b)^2+z^2}}\right] = 0$

für 2.Platte $y=0$: $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{\sqrt{(x-a)^2+b^2+z^2}} + \frac{q}{\sqrt{(x+a)^2+b^2+z^2}} - \frac{q}{\sqrt{(x+a)^2+b^2+z^2}} - \frac{q}{\sqrt{(x-a)^2+b^2+z^2}}\right] = 0$

$\vec E = -\nabla\varphi$ Für die Ebene $x=0$ gilt dann:

$$\vec E_{x=0} = -\frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{x=0}\vec n = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big|_{x=0}\vec e_x$$

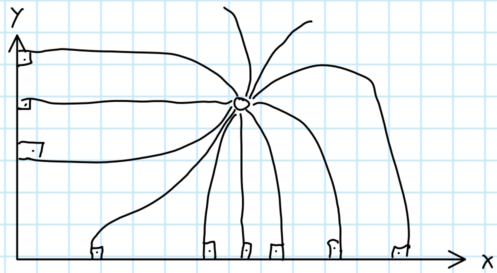
$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-q\,(x-a)}{((x-a)^2+(y-b)^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{-q\,(x+a)}{((x+a)^2+(y+b)^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{-q\,(x+a)}{((x+a)^2+(y-b)^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{-q\,(x-a)}{((x-a)^2+(y+b)^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right]\Big|_{x=0}\vec e_x$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{2a}{(a^2+(y+b)^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{2a}{(a^2+(y-b)^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right]\vec e_x$$

Analog lässt sich das $\vec E$ Feld auf der $y=0$ Ebene bestimmen:

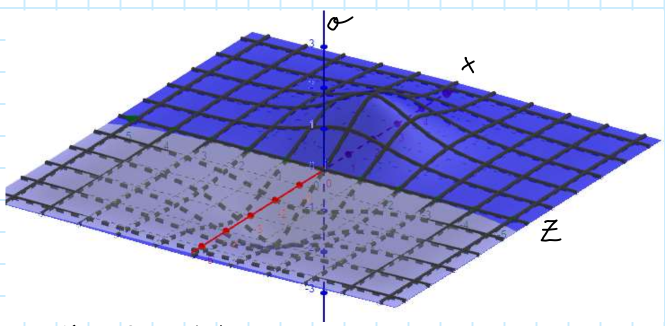
$$\vec E_{y=0} = -\frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{y=0}\vec n = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big|_{y=0}\vec e_y$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{2b}{((x+a)^2+b^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{2b}{((x-a)^2+b^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right]\vec{e}_y$$



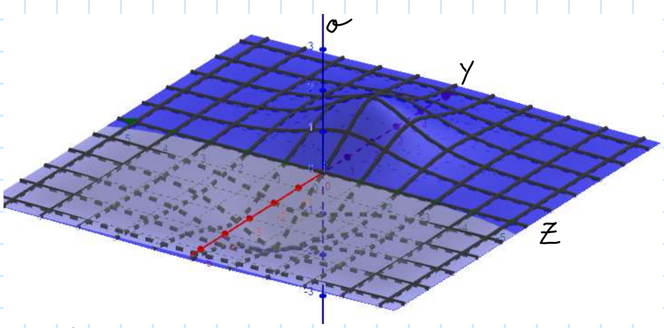
$$\sigma_{x=0} = \varepsilon_0 |\vec{E}|_{x=0} = \frac{q}{4\pi}\left[\frac{2a}{(a^2+(y+b)^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{2a}{(a^2+(y-b)^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$\sigma_{y=0} = \varepsilon_0 |\vec{E}|_{y=0} = \frac{q}{4\pi}\left[\frac{2b}{((x+a)^2+b^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{2b}{((x-a)^2+b^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right]$$



Mit Peak bei $x=a$ $z=0$

bzw für die andere Fläche:



Mit Peak bei $y=b$ $z=0$

e)

$$Q_{ges}^{y=0} = \int_0^\infty dx \int_{-\infty}^{\infty} dz \; \sigma_{y=0} = \int_0^\infty\int_{-\infty}^{\infty} \frac{q}{4\pi}\left[\frac{2b}{((x+a)^2+b^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{2b}{((x-a)^2+b^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right] dx\, dz$$

$$= \frac{qb}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dz \left[\int_a^\infty \frac{1}{(x^2+b^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\, dx - \int_{-a}^{\infty} \frac{1}{(x^2+b^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\, dx\right]$$

$$= \frac{qb}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dz \int_a^{-a} \frac{1}{(x^2+b^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\, dx \qquad | \text{ Integraltabelle}$$

$$= \frac{qb}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{x}{(b^2+z^2)\sqrt{x^2+b^2+z^2}} \right]_a^{-a}$$

$$= \frac{qb}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} - \frac{2a}{(b^2+z^2)\sqrt{b^2+a^2+z^2}} \quad \Big| \text{ Integraltabelle}$$

$$= -\frac{qab}{\pi} \left[\frac{\tan^{-1}\left(\frac{az}{b\sqrt{a^2+b^2+z^2}}\right)}{ab} \right]_{-\infty}^{\infty} \quad \Big| \frac{az}{b\sqrt{a^2+b^2+z^2}} \xrightarrow{z\to\infty} \frac{a}{b} \quad \text{bzw} \xrightarrow{z\to-\infty} -\frac{a}{b}$$

$$= -\frac{q}{\pi}\left(\tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) - \tan^{-1}\left(-\frac{a}{b}\right)\right)$$

$$= -\frac{2q}{\pi} \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)$$

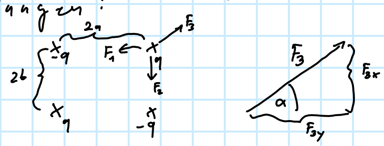
die Integrale gingen auch explizit...

-5

Analog ergibt sich für $x=0$:

$$Q^{x=0} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} \sigma_{x=0} \, dy \, dz = -\frac{2q}{\pi} \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)$$

f) Die Kraft auf die Ladung entspricht der, der Bildladungen:



$$\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{F_{3x}}{F_3}$$

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{F_{3y}}{F_3}$$

$$F = q\cdot\vec{E} = q \cdot \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{(4a^2+4b^2)} \frac{a\vec{e}_x + b\vec{e}_y}{\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{1}{4b^2}\vec{e}_y - \frac{1}{4a^2}\vec{e}_x\right)$$

$$= \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{a\vec{e}_x + b\vec{e}_y}{(4a^2+4b^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{4b^2}\vec{e}_y - \frac{1}{4a^2}\vec{e}_x\right)$$

g) Es handelt sich um einen Quadrupol

Aus Nolting ist dann bekannt:

$$\varphi_Q(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^5}\sum_{i,j} q_{i,j}\,(3x_i x_j - r^2\delta_{ij})$$

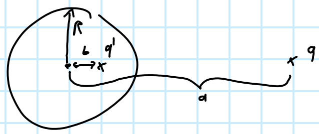
mit $q_i = 2a$ $d_j = 2d$ gilt

$$\Rightarrow \varphi_Q = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^5}\left(q\,4ab\,(3xy - r^2) - q\,4ab\,(-3xy) - q\,4ab\,(-3xy) + q\,4ab\,(3xy - r^2)\right)$$

$$= \frac{qab}{\pi\varepsilon_0 r^5}\left(12xy - 2r^2\right)$$

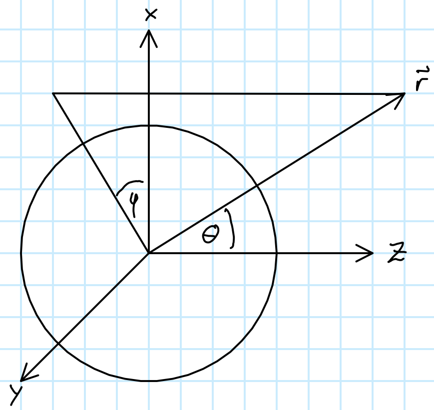
✓

(2a)



Aufgrund der Symmetrie muss q' auf der Achse durch q und den Mittelpunkt liegen

Das Problem ist damit komplett symmetrisch für Rotationen um diese Achse.



$\times\; q\begin{pmatrix}0\\0\\a\end{pmatrix}$

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_b}{|\vec{r}-\begin{pmatrix}0\\0\\b\end{pmatrix}|} + \frac{q}{|\vec{r}-\begin{pmatrix}0\\0\\a\end{pmatrix}|}\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_b}{|r\vec{e}_r - b\vec{e}_z|} + \frac{q}{|r\vec{e}_r - a\vec{e}_z|}\right]$$

ϕ muss auf der Kugeloberfläche $=0$ sein:

$$\phi(r=R) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_B}{|R\vec{e}_r - b\vec{e}_z|} + \frac{q}{|R\vec{e}_r - a\vec{e}_z|}\right]$$

$$= \frac{q_B}{b}\frac{1}{\sqrt{\vec{e}_z^{\,2} - \vec{e}_r\vec{e}_z\frac{R}{b} + \frac{R^2}{b^2}\vec{e}_r^{\,2}}} + \frac{q}{R}\frac{1}{\sqrt{\vec{e}_r^{\,2} - \frac{a}{R}\vec{e}_r\vec{e}_z + \frac{a^2}{R^2}\vec{e}_z^{\,2}}}$$

$$= \frac{q_B}{b}\frac{1}{\sqrt{1-2\frac{R}{b}\cos\theta + \frac{R^2}{b^2}}} + \frac{q}{R}\frac{1}{\sqrt{1-2\frac{a}{R}\cos\theta + \frac{a^2}{R^2}}}$$

Wähle nun $\frac{q_B}{b} = -\frac{q}{R}$ und $\frac{R}{b} = \frac{a}{R}$ damit gilt:

$\phi(r=R) = 0$

$\Rightarrow b = \frac{R^2}{a} < R \quad q_B = -q\frac{b}{R} = -q\frac{R}{a}$ ist die Lösung dieses Randwertproblems

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{|\vec{r}-\begin{pmatrix}0\\0\\a\end{pmatrix}|} - \frac{q\frac{R}{a}}{|\vec{r} - \frac{R^2}{a}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}|}\right]$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{r^2-2ra\cos\theta+a^2}} - \frac{R}{a}\frac{1}{\sqrt{r^2-2r\frac{R^2}{a}\cos\theta+\frac{R^4}{a^2}}}\right]$$

b)

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$\vec{E} = -\nabla\phi = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \Big\{ \Big[-\frac{1}{2} \frac{2r - 2a\cos\theta}{(r^2 - 2ra\cos\theta + a^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{R}{2a} \frac{2r - 2\frac{R^2}{a}\cos\theta}{(r^2 - 2r\frac{R^2}{a}\cos\theta + \frac{R^4}{a^2})^{\frac{3}{2}}} \Big] \vec{e}_r$$

$$+ \frac{1}{r} \Big[-\frac{1}{2} \frac{2ra\sin\theta}{(r^2 - 2ra\cos\theta + a^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{R}{2a} \frac{2r\frac{R}{a}\sin\theta}{(r^2 - 2r\frac{R^2}{a}\cos\theta + \frac{R^4}{a^2})^{\frac{3}{2}}} \Big] \vec{e}_\theta$$

$$+ \frac{1}{r\sin\theta} [0] \vec{e}_\varphi \Big\}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \Big\{ \Big[\frac{r - a\cos\theta}{(r^2 - 2ra\cos\theta + a^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{R}{a} \frac{r - 2\frac{R^2}{a}\cos\theta}{(r^2 - 2r\frac{R^2}{a}\cos\theta + \frac{R^4}{a^2})^{\frac{3}{2}}} \Big] \vec{e}_r$$

$$\Big[\frac{a\sin\theta}{(r^2 - 2ra\cos\theta + a^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{R^3}{a^2} \frac{\sin\theta}{(r^2 - 2r\frac{R^2}{a}\cos\theta + \frac{R^4}{a^2})^{\frac{3}{2}}} \Big] \vec{e}_\theta \Big\}$$

Setze nun $r = R$ um das Feld auf der Kugel zu betrachten.

für die Komponente in $\vec{e}_\theta$ Richtung gilt dann:

$$\vec{E} \cdot \vec{e}_\theta = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \Big[\frac{a\sin\theta}{(R^2 - 2Ra\cos\theta + a^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{R^3}{a^2} \frac{\sin\theta}{(R^2 - 2\frac{R^3}{a}\cos\theta + \frac{R^4}{a^2})^{\frac{3}{2}}} \Big]$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \Big[\frac{a\sin\theta}{(R^2 - 2Ra\cos\theta + a^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{R^3}{a^2} \frac{a^3}{R^3} \frac{\sin\theta}{(R^2 - 2Ra\cos\theta + a^2)^{\frac{3}{2}}} \Big]$$

$$= 0$$

Also hat das E-Feld nur Komponenten in $\vec{e}_r$ Richtung und steht damit senkrecht auf der Kugel. ✓

c) Kraft wie die der Bildladung:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q\, q_B}{(a-b)^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{-q^2\frac{R}{a}}{(a - \frac{R^2}{a})^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{-q^2}{\frac{a^3}{R} - 2\frac{R}{a} + \frac{R^3}{a}}$$

Die Kraft wirkt in negative z Richtung (zur Kugel hin) ✓

d)

$$\sigma = \varepsilon_0\, \vec{e}_r\, \vec{E}\Big|_{r=R} = \frac{q}{4\pi} \Big[\frac{r - a\cos\theta}{(r^2 - 2ra\cos\theta + a^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{R}{a} \frac{r - 2\frac{R^2}{a}\cos\theta}{(r^2 - 2r\frac{R^2}{a}\cos\theta + \frac{R^4}{a^2})^{\frac{3}{2}}} \Big]\Big|_{r=R}$$

$$= \frac{q}{4\pi} \Big[\frac{R - a\cos\theta}{(R^2 - 2Ra\cos\theta + a^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{R}{a} \frac{R - 2\frac{R^2}{a}\cos\theta}{(R^2 - 2\frac{R^3}{a}\cos\theta + \frac{R^4}{a^2})^{\frac{3}{2}}} \Big]$$

$$= \frac{q}{4\pi} \Big[\frac{R - a\cos\theta}{(R^2 - 2Ra\cos\theta + a^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{R}{a} \frac{a^3}{R^3} \frac{R - 2\frac{R^2}{a}\cos\theta}{(R^2 - 2Ra\cos\theta + a^2)^{\frac{3}{2}}} \Big]$$

$$= \frac{q}{4\pi} \frac{R - \frac{a^2}{R}}{(R^2 - 2Ra\cos\theta + a^2)^{\frac{3}{2}}}$$ ✓

$$Q = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} \sigma\, \delta(r-R)\; r^2 \sin\theta \, dr\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \frac{q}{4\pi}\left(R - \frac{a^2}{R}\right)\cdot 2\pi \int_0^{\pi} \frac{R^2}{(R^2-2Ra\cos\theta+a^2)^{\frac{3}{2}}} \sin\theta \, d\theta \quad \Big| \text{ Subst } u = \cos\theta \quad \frac{du}{d\theta} = -\sin\theta$$

$$= \frac{q}{2}\left(R^3 - Ra^2\right) \int_1^{-1} - \frac{1}{(R^2-2Rau+a^2)^{\frac{3}{2}}}\, du$$

$$= \frac{q}{2}(R^3-Ra^2)\left[\frac{1}{Ra}(R^2-2Rau+a^2)^{-\frac{1}{2}}\right]_{-1}^{1} \quad \Big| \cdot -1 \text{ dreht Grenzen}$$

$$= \frac{q}{2}(R^3-Ra^2)\frac{1}{Ra}\left\{(R^2-2Ra+a^2)^{-\frac{1}{2}} - (R^2+2Ra+a^2)^{-\frac{1}{2}}\right\}$$

$$= \frac{q}{2}\left(-a+\frac{R^2}{a}\right)\left\{\frac{1}{a-R} - \frac{1}{a+R}\right\}$$

$$= \frac{q}{2}\left(-a+\frac{R^2}{a}\right)\frac{a+R-a+R}{a^2-R^2}$$

$$= \frac{q}{2}\,\frac{(R^2-a^2)\,(2R)}{a\,(a^2-R^2)}$$

$$= -q\frac{R}{a} = q_B$$

e)

Die bekannte Lösung erzeugt $\phi(r=R)=0$

Für das Potential gilt das Superpositionsprinzip, das heißt, man darf eine Lösung ϕ_2 addieren, sodass gilt $(\phi+\phi_2)|_{r=R} = \phi_0$
Es bietet sich eine Punktladung im Mittelpunkt an. Dann gilt

$$\phi_2(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_{B2}}{r} \qquad \text{Mit } \phi_2(r=R) = \phi_0$$

$$\phi_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_{B2}}{R} \Rightarrow q_{B2} = 4\pi\varepsilon_0 R\,\phi_0$$

Für das Gesamtpotential gilt dann:

$$\phi_{ges} = \phi + \phi_0\frac{R}{r}$$

(3a)

$$\vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla}^2 = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r}\left(\vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r}\right) + \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r}\left(\vec{e}_\varphi \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right) + \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r}\left(\vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$+ \vec{e}_\varphi \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r}\right) + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\vec{e}_\varphi \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right) + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$+ \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}\left(\vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r}\right) + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}\left(\vec{e}_\varphi \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right) + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}\left(\vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$ ✓

b) Die gegebenen Randbedingungen der Platten sind symmetrisch zu z $\quad \phi = \phi(r, \varphi)$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$$?

unabhängig v. z.

-5

c) $$\Delta \phi(r,\varphi) = \frac{\partial^2}{\partial r^2}\phi + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\phi + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\phi = 0$$

$$\Delta (R(r) S(\varphi)) = S \frac{\partial^2}{\partial r^2} R + \frac{S}{r}\frac{\partial}{\partial r} R + \frac{1}{r^2} R \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} S = 0$$

$$\frac{r^2}{R} R'' + \frac{r}{R} R' + \frac{1}{S} S'' = 0 \qquad R' = \frac{\partial R}{\partial r} \quad S' = \frac{\partial S}{\partial \varphi}$$

Da R nur von r und S nur von φ abhängt gibt es eine konstante ω, sodass:

$$\frac{r^2}{R} R'' + \frac{r}{R} R' = \omega^2 \qquad \frac{1}{S} S'' = -\omega^2$$ ✓

d) Ansatz für S:

$$S(\varphi) = A\cos(\omega\varphi) + B\sin(\omega\varphi)$$

Randbedingungen: $S(0) = 0 = A$

$$S(\beta) = 0 = B\sin(\omega\beta) \qquad m \in \mathbb{N}$$

$$\omega\beta = m\pi$$

$$\omega = \frac{m\pi}{\beta}$$

$$\Rightarrow S(\varphi) = B \sin\left(\frac{m\pi}{\beta}\varphi\right)$$ ✓

Ansatz für R:

$$r^2 R'' + r R' - \omega^2 R = 0$$

$$R(r) = \gamma r^\lambda \quad \text{einsetzen:}$$

$$\gamma(\lambda-1)\lambda r^2 r^{\lambda-2} + r\gamma\lambda r^{\lambda-1} - \omega^2 \gamma r^\lambda = 0 \qquad \gamma \neq 0 \quad r^\lambda \neq 0$$

$$\lambda^2 - \lambda + \lambda - \omega^2 = 0$$

$$\lambda = \pm\omega = \pm\frac{m\pi}{\beta}$$

Da R stetig sein soll gilt also $R(r) = \gamma\, r^{\frac{m\pi}{\beta}}$
Da γ und B noch nicht bestimmt sind ist eine Lösung als Superposition mit faktor $a_m = \gamma B$ gegeben:

$$\phi(r,\varphi) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m\, r^{\frac{m\pi}{\beta}} \sin\left(\frac{m\pi}{\beta}\varphi\right)$$

e) Orthogonalität:

$$\int_0^\beta \sin\left(\frac{m\pi}{\beta}\varphi\right) \sin\left(\frac{n\pi}{\beta}\varphi\right) d\varphi$$

Fall $n=m$

$$\int_0^\beta \sin^2\left(\frac{m\pi}{\beta}\varphi\right) d\varphi$$

$$= \frac{[\varphi]_0^\beta - \left[\cos\left(\frac{m\pi}{\beta}\varphi\right)\sin\left(\frac{m\pi}{\beta}\varphi\right)\right]_0^\beta}{2} = \frac{\beta}{2}$$

Fall $n \neq m$

2 Mal Additionstheorem anwenden:

$$= \frac{1}{2}\int_0^\beta \left(\cos\left(\frac{m-n}{\beta}\pi\varphi\right) - \cos\left(\frac{m+n}{\beta}\pi\varphi\right)\right) d\varphi$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\beta}{\pi(m-n)} \sin\left(\frac{m-n}{\beta}\pi\varphi\right) - \frac{\beta}{\pi(m+n)} \sin\left(\frac{m+n}{\beta}\pi\varphi\right)\right]_0^\beta$$

Da der Sinus von Vielfachen von π null ist, ist dieses Integral immer 0

$$\Rightarrow \int_0^\beta \sin\left(\frac{m\pi}{\beta}\varphi\right) \sin\left(\frac{n\pi}{\beta}\varphi\right) d\varphi = \frac{\beta}{2}\delta_{nm}$$

Orthogonales System

f) Für den Fall keiner Ladungsverteilung ist $\phi = 0$ in der Tat eine Lösung. Damit $\phi(r,\varphi)$ diesen Fall ebenfalls löst, wählt man $a_m = 0$ für alle m und hat die Randbedingungen berücksichtigt. Dann gilt: $\phi(r,\varphi) = \phi = 0$ ohne Widerspruch.