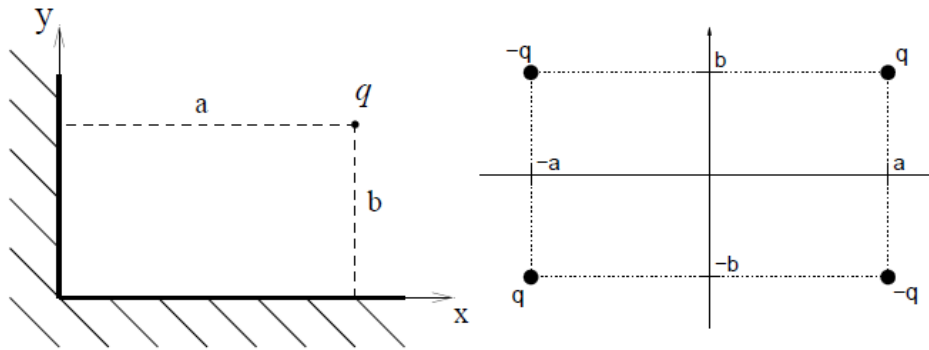


Klassische Theoretische Physik III WS 2020/2021

Prof. Dr. M. Garst
Dr. B. NarozhnyBlatt 5
Lösungen

1. Leiterecke:

Eine Ladung q befindet sich im Abstand a bzw. b von senkrecht zueinander stehenden, unendlich ausgedehnten, leitenden, geerdeten Ebenen.



Die Platten sind leitend, daher darf keine elektrische Feldkomponente in den Platten vorhanden sein. Das Potential ist konstant und wir wählen insbesondere $\Phi = 0$.

(a) Wo liegen die Spiegelladungen und wie groß sind sie?

Wir legen die Punktladung in die xy -Ebene und bezeichnen ihre Position mit $\mathbf{r}_0 = (a, b)$. Die Spiegelladungen mit Ladung $\pm q$ liegen dann gemäß der Abbildung bei $\mathbf{r}_1 = (a, -b)$, $\mathbf{r}_2 = (-a, -b)$ und $\mathbf{r}_3 = (-a, b)$. Ihre Ladungen sind: $q_1 = -q$, $q_2 = q$, $q_3 = -q$.

(b) Überprüfen Sie explizit, dass ihre Anordnung die Randbedingungen $\Phi(0, y, z) = \Phi(x, 0, z) = 0$ erfüllt:

Das Gesamtpotential (für $x > 0$, $y > 0$) ist gegeben durch

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=0}^3 \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}.$$

Dann

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+a)^2 + (y-b)^2 + z^2}} \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{(x+a)^2 + (y+b)^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y+b)^2 + z^2}} \right).$$

And den Rändern des Gebiets ergibt sich

$$\begin{aligned}\phi(0, y, z) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + (y-b)^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + (y-b)^2 + z^2}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{a^2 + (y+b)^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + (y+b)^2 + z^2}} \right) = 0, \\ \phi(x, 0, z) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + b^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+a)^2 + b^2 + z^2}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{(x+a)^2 + b^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + b^2 + z^2}} \right) = 0.\end{aligned}$$

(c) Berechnen Sie das elektrische Feld auf den Oberflächen.

Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi}{\partial y}\Big|_{x=0} &= \frac{\partial\phi}{\partial z}\Big|_{x=0} = 0, \\ \frac{\partial\phi}{\partial x}\Big|_{x=0} &= \frac{2aq}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{[a^2 + (y-b)^2 + z^2]^{3/2}} - \frac{1}{[a^2 + (y+b)^2 + z^2]^{3/2}} \right).\end{aligned}$$

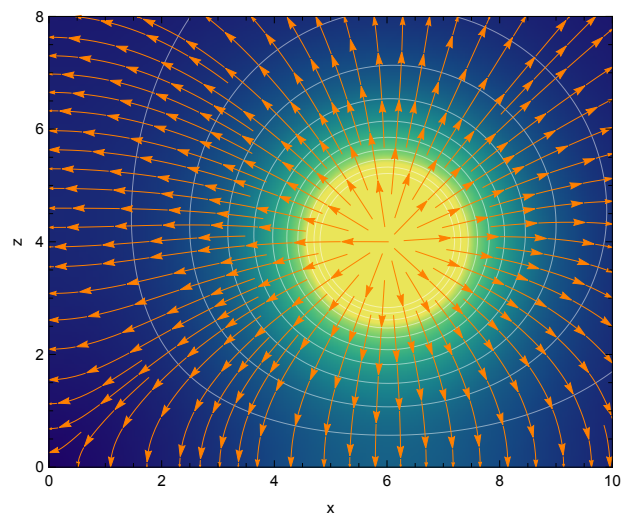
Das elektrische Feld steht also senkrecht auf den Platten, wie gefordert und ist für $x = 0$ gegeben durch

$$\mathbf{E}(0, y, z) = -\mathbf{e}_x \frac{2aq}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{[a^2 + (y-b)^2 + z^2]^{3/2}} - \frac{1}{[a^2 + (y+b)^2 + z^2]^{3/2}} \right).$$

Und ebenso erhalten wir für die Platte in der xz -Ebene,

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi}{\partial x}\Big|_{y=0} &= \frac{\partial\phi}{\partial z}\Big|_{y=0} = 0, \\ \frac{\partial\phi}{\partial y}\Big|_{y=0} &= \frac{bq}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{[(x-a)^2 + b^2 + z^2]^{3/2}} - \frac{1}{[(x+a)^2 + b^2 + z^2]^{3/2}} \right), \\ \mathbf{E}(x, 0, z) &= -\mathbf{e}_y \frac{bq}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{[(x-a)^2 + b^2 + z^2]^{3/2}} - \frac{1}{[(x+a)^2 + b^2 + z^2]^{3/2}} \right).\end{aligned}$$

Skizzieren Sie das Feldlinienbild. Hier $a = 6$, $b = 4$



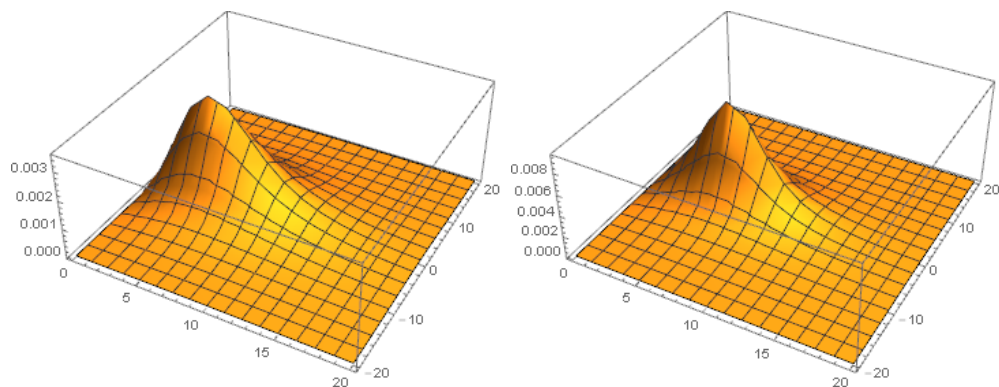
(d) Berechnen Sie die Oberflächenladungsdichte σ .

Die Oberflächenladungsdichte ergibt sich wieder aus dem Sprung des elektrischen Feldes. Das Feld in den Platten verschwindet und wir erhalten

$$\sigma(0, y, z) = -\frac{aq}{2\pi} \left(\frac{1}{[a^2 + (y-b)^2 + z^2]^{3/2}} - \frac{1}{[a^2 + (y+b)^2 + z^2]^{3/2}} \right),$$

$$\sigma(x, 0, z) = -\frac{bq}{2\pi} \left(\frac{1}{[(x-a)^2 + b^2 + z^2]^{3/2}} - \frac{1}{[(x+a)^2 + b^2 + z^2]^{3/2}} \right).$$

Skizzieren Sie die Oberflächenladungsdichte σ .



Die Abbildungen zeigen $-\sigma(0, y, z)$ (links) und $-\sigma(x, 0, z)$ (rechts) für $q = 1$, $a = 6$, $b = 4$.

(e) Berechnen Sie die gesamte Influenzladung in jeder der beiden Halbebenen:

Die gesamte Oberflächenladung in der xz-Ebene ist gegeben durch

$$\begin{aligned} Q_{xz} &= -\frac{bq}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_0^{\infty} dx \left(\frac{1}{[(x-a)^2 + b^2 + z^2]^{3/2}} - \frac{1}{[(x+a)^2 + b^2 + z^2]^{3/2}} \right) \\ &= -\frac{bq}{2\pi} \int_{-a}^a dx \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{1}{[x^2 + b^2 + z^2]^{3/2}} \\ &= -\frac{bq}{2\pi} \int_{-a}^a dx \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{(b^2 + x^2)[x^2 + b^2 + z^2]^{1/2}} \right) \\ &= -\frac{bq}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{2dx}{(b^2 + x^2)} = -\frac{q}{\pi} \int_{-a/b}^{a/b} \frac{dx}{(1 + x^2)} \\ &= -\frac{2q}{\pi} \arctan(a/b). \end{aligned}$$

Entsprechend erhalten wir in der yz-Ebene

$$\begin{aligned} Q_{yz} &= -\frac{aq}{2\pi} \int_0^\infty dy \int_{-\infty}^\infty dz \left(\frac{1}{[a^2 + (y-b)^2 + z^2]^{3/2}} - \frac{1}{[a^2 + (y+b)^2 + z^2]^{3/2}} \right) \\ &= -\frac{aq}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty dz \int_{-b}^b dy \frac{1}{[a^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} = -\frac{2q}{\pi} \arctan(b/a). \end{aligned}$$

Insgesamt

$$Q_{xz} + Q_{yz} = -q.$$

Für $a \gg b$ erhalten wir $Q_{xz} \simeq -q$ und $Q_{yz} \simeq 0$.

(f) *Welche Kraft wirkt auf die Ladung?*

Die Punktladung erfährt die Kraft gegeben durch die Spiegelladungen,

$$\mathbf{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^3 \frac{q_i(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3},$$

$$F_x = -q\mathbf{e}_x \cdot \nabla\phi(\mathbf{r}) = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{a}{4} \left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{a^3} \right),$$

$$F_y = -q\mathbf{e}_y \cdot \nabla\phi(\mathbf{r}) = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{b}{4} \left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{b^3} \right).$$

Hierbei $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$.

(g) *Untersuchen Sie das Potential für große Abstände $|\mathbf{r}| \gg a, b$ von der Ladung*

Wir entwickeln das Skalarpotential [siehe Aufgabe (b)] für $r \gg |\mathbf{r}_i|$, wobei wir mit $|\mathbf{r}_i|$ wieder die Position der i-ten Ladung bezeichnen (siehe Skizze).

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} &= \frac{1}{\sqrt{r^2 + r_i^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_i}} \simeq \frac{1}{r} \left(1 - \frac{\mathbf{r}_i \cdot (\mathbf{r}_i - 2\mathbf{r})}{2r^2} + \frac{3[\mathbf{r}_i \cdot (\mathbf{r}_i - 2\mathbf{r})]^2}{8r^4} \right) \\ &= \frac{1}{r} \left(1 - \frac{\mathbf{r}_i \cdot (\mathbf{r}_i - 2\mathbf{r})}{2r^2} + \frac{3|\mathbf{r}_i|^4}{8r^4} - \frac{3\mathbf{r}_i^2(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r})}{2r^4} + \frac{3(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r})^2}{2r^4} \right). \end{aligned}$$

Nur der letzte Term trägt nach der Summe über i bei, sodass

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=0}^3 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=0}^3 \frac{q_i}{r^5} \frac{3(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r})^2}{2} = \frac{3qab}{\pi\epsilon_0} \frac{xy}{r^5}.$$

Für $|\mathbf{r}| \gg |\mathbf{r}_i|$ sieht man in erster Näherung nur noch das Quadrupolfeld der Anordnung, da das Mono- und Dipolmoment der Ladung und ihrer drei Bildladungen verschwinden.

2. Leitende Kugel:

Betrachten Sie eine geerdete, leitende Kugel K_R mit Radius R

$$K_R = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{r}| < R\}.$$

Am Punkt $\mathbf{r}_q = (0, 0, a)$ mit $a > R$ befindet sich eine Punktladung q .

Da die leitende Kugel geerdet ist, gilt für das Potential im Innenraum K_R , $\phi(\mathbf{r}) = 0$. Wir berechnen nun das Potential im Außenraum $\bar{K}_R^C = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{r}| > R\}$ mit der Methode der Spiegelladung.

Wir fügen eine fiktive Spiegelladung q' im Innenraum der Kugel hinzu, deren Potential im Außenraum die Laplace-Gleichung erfüllt, also eine homogene Lösung darstellt. Diese Lösung wird so gewählt, dass das Gesamtpotential das Randwertproblem löst. Die Spiegelladung beschreibt dabei das Potential der auf dem Rand des Gebietes $\bar{K}_R^C$ induzierten Oberflächenladung.

(a) Berechnen Sie das Potential im gesamten Raum.

Da das Problem symmetrisch bezüglich Rotationen um die z-Achse ist kann die Spiegelladung ebenfalls nur auf der z-Achse liegen. Wir bezeichnen die Position der Spiegelladung mit $\mathbf{a}' = a'\mathbf{e}_z$, wobei $|a'| < R$ gilt und $\mathbf{e}_z$ den Einheitsvektor in z-Richtung bezeichnet. Das Potential im Außenraum ist nun gegeben durch die Überlagerung beider Potentiale,

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{|\mathbf{r} - a\mathbf{e}_z|} + \frac{q'}{|\mathbf{r} - a'\mathbf{e}_z|} \right).$$

Die Konstanten a' und q' sind aus der Randbedingung $\phi(|\mathbf{r}| = R) = 0$ zu berechnen. Dazu betrachten wir die zwei Punkte $\mathbf{r} = \pm R\mathbf{e}_z$ und erhalten:

$$\frac{q}{a - R} = \frac{-q'}{R - a'}, \quad \frac{q}{a + R} = \frac{-q'}{a' + R}.$$

Man erkennt unmittelbar, dass $\text{sign}(q) = -\text{sign}(q')$ gilt. Die Lösung der zwei Gleichungen ergibt

$$a' = \frac{R^2}{a} < R, \quad q' = -q \frac{R}{a}.$$

Wir setzen die Ergebnisse in das Potential und erhalten

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - a\mathbf{e}_z|} - \frac{R/a}{|\mathbf{r} - \frac{R^2}{a}\mathbf{e}_z|} \right) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{r^2}{a^2} - 2\frac{r}{a} \cos \theta}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{R^2}{a^2} + \frac{r^2}{R^2} - 2\frac{r}{a} \cos \theta}} \right). \end{aligned}$$

Hier haben wir die Kugelkoordinaten (r, φ, θ) eingeführt, wobei $\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_z = r \cos \theta$.

- (b) *Leiten Sie daraus das elektrische Feld $\mathbf{E}$ auf der Oberfläche her. Zeigen Sie dabei, dass das elektrische Feld senkrecht auf der Oberfläche der Kugel steht.*

Das elektrische Feld ist gegeben durch $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r})$. Wir wollen das elektrische Feld auf der Kugeloberfläche, also für $r \rightarrow R$ berechnen. Das Potential hängt nicht vom Azimutalwinkel φ ab, daher verschwindet die Komponente des elektrischen Feldes in Richtung $\mathbf{e}_\varphi$. Die Ableitung des Potentials nach dem Polarwinkel θ verschwindet ebenfalls auf der Kugeloberfläche,

$$-\partial_\theta\phi(\mathbf{r})\Big|_{\bar{r}\rightarrow\bar{R}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} \left[\frac{(r/a)\sin\theta}{(1 + \frac{r^2}{a^2} - 2\frac{r}{a}\cos\theta)^{3/2}} - \frac{(r/a)\sin\theta}{(\frac{R^2}{a^2} + \frac{r^2}{R^2} - 2\frac{r}{a}\cos\theta)^{3/2}} \right]_{r=R} = 0.$$

Damit ist das elektrische Feld auf der Kugeloberfläche parallel zu $\mathbf{e}_r$ und gegeben durch

$$\mathbf{E}(\mathbf{r})|_{r=R} = -\mathbf{e}_r \frac{\partial\phi}{\partial r}\Big|_{r=R} = \mathbf{e}_r \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \frac{R^2 - a^2}{[a^2 + R^2 - 2aR\cos(\theta)]^{3/2}}.$$

- (c) *Welche Kraft wirkt auf die Ladung?*

Aus dem Potential ergibt sich die Kraft, die auf die Punktladung q wirkt. Dabei muss die unendliche Selbstwechselwirkung ignoriert werden. Die Ladung q erfährt daher nur die Kraft hervorgerufen durch die Oberflächenladung, welche äquivalent zur Bildladung ist. Am Punkt $r = a$, $\theta = 0$ verschwindet die Ableitung $\partial_\theta\phi$ und zwar

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}_{\text{Bildl.}}(a\mathbf{e}_z) = \mathbf{e}_r \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{\sqrt{\frac{R^2}{a^2} + \frac{r^2}{R^2} - 2\frac{r}{a}}} \Big|_{r=a} = -\mathbf{e}_r \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{aR}{(a^2 - R^2)^2}.$$

- (d) *Berechnen Sie die auf der Oberfläche der Kugel induzierte Flächenladungsdichte σ . Zeigen Sie, dass die gesamte, auf der Oberfläche induzierte Ladung genau der Spiegelladung entspricht.*

Nach dem Gaußschen Gesetz ist die Oberflächenladung σ auf der Kugeloberfläche gegeben durch die Unstetigkeit des elektrischen Feldes an der Grenzschicht mit Normalen $\pm\mathbf{e}_r$,

$$\sigma = \epsilon_0 \mathbf{e}_r \cdot [\mathbf{E}(r \rightarrow R - 0) - \mathbf{E}(r \rightarrow R + 0)].$$

Da das elektrische Feld im Innenraum verschwindet erhalten wir

$$\sigma_{\text{Oberfl.}} = \frac{q}{4\pi R} \frac{R^2 - a^2}{[a^2 + R^2 - 2aR\cos(\theta)]^{3/2}}.$$

Die gesamte Oberflächenladung erhalten wir durch die Integration

$$\begin{aligned} Q_{\text{Oberfl.}} &= \frac{q}{4\pi} \int_{-1}^1 d\cos\theta \int_0^{2\pi} d\phi R^2 \frac{R^2 - a^2}{[a^2 + R^2 - 2aR\cos\theta]^{3/2}} \\ &= \frac{q}{2} \frac{R^2 - a^2}{2a} \int_{-1}^1 dz \frac{1}{[a^2 + R^2 - z]^{3/2}} = -q \frac{R}{a}. \end{aligned}$$

Wie erwartet ist die gesamte Oberflächenladung gleich der Spiegelladung.

- (e) *Wie ändert sich die Lösung, wenn die Kugeloberfläche auf dem Potential Φ_0 liegt?*

Wenn die Kugel nicht geerdet ist, sondern auf dem Potential Φ_0 liegt, müssen wir zu dem Skalarpotential im Außenraum eine Lösung $\varphi_1(\mathbf{r})$ der Laplacegleichung addieren, welche im Unendlichen verschwindet und auf der Kugeloberfläche den Wert Φ_0 annimmt. Diese Lösung ist natürlich gegeben durch die Fundamentallösung

$$\varphi_1(\mathbf{r}) = \frac{\Phi_0 R}{|\mathbf{r}|}.$$

Das gesamte Potential ist dann gegeben durch

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{r^2}{a^2} - 2\frac{r}{a} \cos \theta}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{R^2}{a^2} + \frac{r^2}{R^2} - 2\frac{r}{a} \cos \theta}} \right) + \frac{\Phi_0 R}{r}.$$

3. Zylinderkoordinaten:

Betrachtet werden soll eine Ecke aus zwei leitenden, unendlich ausgedehnten, geerdeten Ebenen.

- (a) *Schreiben Sie die Laplace-Gleichung in Zylinderkoordinaten:*

Die Laplace-Gleichung:

$$\Delta\Phi = 0.$$

Der Laplace-Operator in kartesischen Koordinaten

$$\Delta\Phi(x, y, z) = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}.$$

Die Zylinderkoordinaten:

$$(x, y, z) \Rightarrow (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z).$$

Der Laplace-Operator durch den Nabla-Operator

$$\Delta = \nabla^2.$$

Vom Blatt 2:

$$\nabla f = \mathbf{e}_r \frac{\partial f}{\partial r} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial f}{\partial z},$$

$$\mathbf{e}_r = \mathbf{e}_x \cos \varphi + \mathbf{e}_y \sin \varphi, \quad \mathbf{e}_\varphi = -\mathbf{e}_x \sin \varphi + \mathbf{e}_y \cos \varphi,$$

und zwar

$$\begin{aligned}\Delta f &= \nabla \cdot [\nabla f] = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r} \mathbf{e}_\varphi \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\mathbf{e}_r \frac{\partial f}{\partial r} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial z} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.\end{aligned}$$

Deswegen ist die Laplace-Gleichung in Zylinderkoordinaten

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$$

- (b) *Zeigen Sie, dass alle Lösungen der Laplace-Gleichung mit den obengenannten Randbedingungen unabhängig von z sind:*

Da die Randbedingungen unabhängig von der z -Koordinate sind, hängt das Potential von z auch nicht ab.

- (c) *Verwenden Sie den Separationsansatz ...*

Wir setzen $\Phi(r, \varphi, z) = R(r)S(\varphi)$ in die Definition des Laplace-Operators ein. Da Φ nicht von z abhängt, fällt der Term mit der z -Ableitung sofort weg. Wir suchen nun nach Lösungen der Laplace-Gleichung $\Delta \Phi = 0$,

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right] R(r)S(\varphi) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} R(r)S(\varphi) = 0.$$

Wir multiplizieren die Gleichung mit r^2 und teilen sie durch Φ . Da $S(\varphi)$ nicht von r abhängt, kann man es als Konstante vor die r -Ableitung ziehen, das gleiche gilt für $R(r)$ und die φ -Ableitung. Wir erhalten nun

$$\frac{r^2}{R(r)} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right] R(r) + \frac{1}{S(\varphi)} \frac{\partial^2 S(\varphi)}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Da der erste Term nur von r (aber nicht von φ) und der zweite Term nur von φ (aber nicht von r) abhängt, müssen beide Terme konstant sein. Es folgt daher, dass

$$\frac{r^2}{R(r)} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right] R(r) = c, \quad \frac{1}{S(\varphi)} \frac{\partial^2 S(\varphi)}{\partial \varphi^2} = -c,$$

womit wir die partielle Differentialgleichung in zwei gewöhnliche Differentialgleichungen separiert haben.

- (d) *Zeigen Sie, dass die allgemeine Lösung der Laplace-Gleichung mit der Randbedingung eines verschwindenden Potentials auf den Oberflächen die gegebene Form annimmt.*

Wir fangen mit der zweiten Gleichung an, die wir mit $S(\varphi)$ durchmultiplizieren und alles auf eine Seite bringen:

$$\frac{\partial^2 S(\varphi)}{\partial \varphi^2} + cS(\varphi) = 0.$$

Wenn wir davon ausgehen, dass $c > 0$, dann sind die Lösungen

$$S(\varphi) = A \cos(\omega\varphi) + B \sin(\omega\varphi), \quad \omega^2 = c.$$

Da wir annehmen, dass beide Leiterplatten geerdet sind, muss $S(\varphi = 0) = 0$ und $S(\varphi = \beta) = 0$ gelten, somit erhalten wir

$$A = 0, \quad \omega = \frac{m\pi}{\beta}.$$

Der Vorfaktor B ist beliebig. Wir können B in die globale Konstante des Gesamtpotentials Φ absorbieren.

Die Lösung für $c < 0$ tritt **nicht** auf, da die Lösung daraufhin eine Kombination aus hyperbolischen Funktionen ($\sinh(x), \cosh(x)$) gewesen wäre, die aber in jeder Kombination maximal eine Nullstelle besitzen, weswegen die Lösung auf Grund des physikalischen Problems nicht erlaubt ist.

Ebenfalls irrelevant ist der Fall $c = 0$, da die Gleichung sonst auf $\partial_\varphi^2 S(\varphi) = 0$ reduzieren würde. Diese hat $S(\varphi) = A\varphi + B$ als allgemeine Lösung, welche aber außer für $A = B = 0$ nie $S(0) = S(\beta) = 0$ erfüllen kann. Somit ist diese Lösung durch die Randbedingungen ebenfalls nicht erlaubt.

Betrachten wir jetzt die erste Gleichung:

$$r^2 R''(r) + r R'(r) - c R(r) = 0.$$

Da dies eine skaleninvariante Gleichung ist ($r \rightarrow lr$ würde nichts an dem Verhältnis der Koeffizienten der Terme zueinander ändern), wählen wir ein Potenzgesetz, $R(r) = r^\lambda$ als Lösungsansatz. Eingesetzt ergibt dies

$$r^2 \lambda(\lambda - 1) r^{\lambda-2} + r \lambda r^{\lambda-1} - c r^\lambda = 0.$$

Dividieren wir diese Gleichung durch r^λ , so ergibt sich

$$\lambda^2 - \lambda + \lambda - c = 0,$$

folglich also

$$\lambda = \pm \sqrt{c} = \pm \frac{m\pi}{\beta}.$$

Da $R(r)$ für $r = 0$ (in der Ecke) wohldefiniert und gleich 0 sein sollte, legt dies uns das Vorzeichen für λ fest. Damit ist

$$R(r) = r^{m\pi/\beta}.$$

Somit haben wir die Lösung des Gleichungssystems unter den gegebenen Randbedingungen bestimmt, und diese ist gegeben durch

$$\Phi = Z_0 r^{m\pi/\beta} \sin \frac{m\pi\varphi}{\beta}.$$

Da m eine beliebige natürliche Zahl ist, kann die allgemeinste Lösung unter der gegebenen Randbedingung auch eine beliebige Linearkombination mit verschiedenen m sein. Daher ist die allgemeine Lösung des Problems gegeben durch

$$\Phi(r, \varphi, z) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m r^{m\pi/\beta} \sin \frac{m\pi\varphi}{\beta}.$$

- (e) Zeigen Sie, dass die Funktionen $\sin(m\pi\varphi/\beta)$ ein vollständiges Orthonormalsystem formen (unter Betrachtung der Randbedingungen). Finden Sie die entsprechenden Normierungskonstanten

$$\int_0^\beta d\varphi \sin \frac{m\pi\varphi}{\beta} \sin \frac{n\pi\varphi}{\beta} = \frac{\beta}{2} \delta_{mn}.$$

- (f) In der Vorlesung haben sie das Theorem kennengelernt, welches die Eindeutigkeit des Dirichletproblems sicherstellt. Hier erfüllt die triviale Lösung $\Phi = 0$ die Laplace-Gleichung und zugleich die Randbedingungen. Gibt es hier einen Widerspruch mit der Lösung $\Phi(r, \varphi)$ [siehe Aufgabe (d)]?

Wir haben nun gezeigt, dass die Lösung die obige Form haben muss, die a_m sind aber weiterhin unbestimmt. Um diese weiter zu bestimmen, benötigen wir noch zusätzliche Randbedingungen. Wenn wir aus physikalischen Gründen erfordern, dass das Potential im unendlichen verschwindet, sind alle $a_m = 0$, was zu erwarten war, denn dies ist die Konstruktion eines geerdeten Faraday'schen Käfig, innerhalb dessen das Potential verschwindet.