Karlsruher Institut für Technologie | Institut für Theoretische Festkörperphysik

Klassische Theoretische Physik III WS 2020/2021

Prof. Dr. M. Garst
Dr. B. Narozhny

Blatt 6
Abgabe 11.12.2020, Besprechung 15-16.12.2020

---

1. Kugelflächenfunktionen: (40 Punkte)

Betrachten Sie eine Kugelschale mit Radius R, die auf folgendem Potential liegt:

$$\Phi = V \cos\theta \sin^2\theta, \qquad (0 \leqslant \theta \leqslant \pi).$$

Berechnen Sie das Potential im Außen- und Innenraum jeweils als Entwicklung in Kugelflächenfunktionen bis zu $l = 3$.

Hinweis 1: Die allgemeine Entwicklung in Kugelflächenfunktionen lautet

$$\Phi(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \left[A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-(l+1)}\right] Y_{lm}(\theta,\varphi),$$

wobei

$$Y_{lm}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta) e^{im\varphi}.$$

Hier sind $P_l^m(\cos\theta)$ die zugeordneten Legendre-Polynomen (siehe die Vorlesung für die äquivalente explizite Form)

$$P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} \left(1 - x^2\right)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} \left(x^2 - 1\right)^l.$$

Betrachten Sie dazu zuerst die Symmetrie des Problems und vereinfachen Sie den allgemeinen Ausdruck.

Hinweis 2: Überlegen Sie anschließend für Innen- und Außenraum getrennt, was die jeweiligen Randbedingungen für die Koeffizienten A_{lm} bzw. B_{lm} bedeuten. Benutzen Sie weiterhin, dass jede Funktion $g(\theta,\varphi)$ als Entwicklung in Kugelflächenfunktionen ausgedrückt werden kann:

$$g(\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} C_{lm} Y_{lm}(\theta,\varphi),$$

mit den Koeffizienten A_{lm} durch

$$C_{lm} = \int d\Omega g(\theta,\varphi) Y_{lm}^*(\theta,\varphi).$$

mit $d\Omega = d\varphi d\theta \sin\theta$.

2. Multipolentwicklung: (30 Punkte)

Berechnen Sie das Potential in großer Entfernung $r \gg a$ als Multipolentwicklung (bis zu max. Quadrupoltermen) der folgenden Punktladungsverteilungen:

(a) Ladung $-q$ im Ursprung, $3q$ bei $(0,0,a)$

(b) Ladung $3q$ im Ursprung, $-q$ bei $(0,0,-a)$

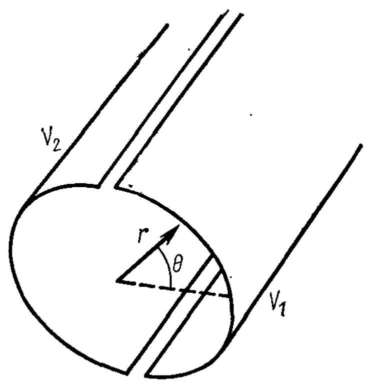
(c) Ladung $-q$ im Ursprung, $3q$ bei $(a,0,0)$

(d) Ladung $-2q$ im Ursprung, q bei $(a,0,0)$, q bei $(0,0,-a)$

(e) Finden Sie eine Konfiguration von Punktladungen auf einer Linie, so dass die Multipolentwicklung des Potentials mit dem Oktupolterm beginnt.

3. Leitender Zylinder: (30 Punkte)

Betrachten Sie einen Leiter, der die Form einer zylindrischen Oberfläche hat, und in zwei Teile geschnittet wird (siehe Abbildung). Die zwei Halbzylinder sind voneinander isoliert und liegen auf unterschindlichen Potentialen V_1 und V_2 (die Dicke der isolierenden Schicht zwischen den Teilen ist viel kleiner als der Radius, $\delta \ll R$).



Zeigen Sie, dass das Skalarpotential innerhalb des Zylinders durch

$$\Phi = \frac{V_1 + V_2}{2} + 2\frac{V_1 - V_2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{2m-1} \left(\frac{r}{R}\right)^{2m-1} \cos\left[(2m-1)\theta\right],$$

gegeben ist.

Hinweis: Benutzen Sie Ihre Erfahrungen aus dem Blatt 5, Aufgabe 3.