Blatt 6 Tobias

Mittwoch, 9. Dezember 2020 17:10

100

/1

Wenn ϕ_0 auf der Kugeloberfläche von φ unabhängig sein soll, muss $\phi(r,\theta,\varphi)$ als Entwicklung in Kugelflächenkoordinaten auch von φ unabhängig sein. Das bedeutet $[A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-(l+1)}]$ und $Y_{lm}(\theta,\varphi)$ müssen von φ unabhängig sein. $\frac{\partial Y_{lm}}{\partial \varphi} = 0$ gilt im Allgemeinen nur für $m=0$.

$$\phi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} [A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}]\, Y_l(\theta)$$

$$\phi(R,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} [A_l R^l + B_l R^{-(l+1)}]\, Y_l(\theta)$$

entwickelt man $\phi_0 = V\cos\theta \sin^2\theta$ ebenfalls in Kugelflächenfunktionen ergibt sich mit $m=0$:

$$\phi_0 = \sum_{l=0}^{\infty} C_l Y_l \quad \text{mit} \quad C_l = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\, \phi\, Y_l(\theta) = 2\pi V \int_0^{\pi} \sin^3\theta \cos\theta\, Y_l \, d\theta$$

Die Kugelflächenfunktionen sind aus der Vorlesung bekannt:

$l=0$	$l=1$	$l=2$	$l=3$
$\sqrt{\frac{1}{4\pi}}$	$\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\vartheta$	$\sqrt{\frac{5}{16\pi}}\,(3\cos^2\vartheta - 1)$	$\sqrt{\frac{7}{16\pi}}\,(5\cos^3\vartheta - 3\cos\vartheta)$

$$C_0 = 2\pi V \int_0^{\pi} \sin^3\theta \cos\theta \sqrt{\tfrac{1}{4\pi}}\, d\theta = V\sqrt{\pi}\left[\tfrac{1}{4}\sin^4\theta\right]_0^{\pi} = 0$$

$$C_1 = 2\pi V \int_0^{\pi} \sqrt{\tfrac{3}{4\pi}} \sin^3\theta \cos^2\theta \, d\theta = \sqrt{3\pi} V \int_0^{\pi} \sin\theta\cos^2\theta - \sin\theta\cos^4\theta \, d\theta = V\sqrt{3\pi}\left[-\tfrac{1}{3}\cos^3\theta + \tfrac{1}{5}\cos^5\theta\right]_0^{\pi}$$

$$= \sqrt{3\pi} V \left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{5}\right) = \tfrac{4}{15}\sqrt{3\pi}\, V$$

$$C_2 = 2\pi V \int_0^{\pi} \sin^3\theta\cos\theta \sqrt{\tfrac{5}{16\pi}}\,(3\cos^2\theta - 1)\, d\theta = 3\tfrac{\sqrt{5\pi}}{2} V \int_0^{\pi} \sin^3\theta\cos^3\theta\, d\theta - 0$$

$$= 3\tfrac{\sqrt{5\pi}}{2} V \int_0^{\pi} \sin^3\theta\cos\theta - \sin^5\theta\cos\theta \, d\theta = 3\tfrac{\sqrt{5\pi}}{2}\left[\tfrac{1}{4}\sin^4\theta - \tfrac{1}{6}\sin^6\theta\right]_0^{\pi} = 0$$

$$C_3 = 2\pi V \int_0^{\pi} \sqrt{\tfrac{7}{16\pi}}\,(5\cos^3\theta - 3\cos\theta)\sin^3\theta\cos\theta\, d\theta = \tfrac{\sqrt{7\pi}}{2}\int_0^{\pi} 5\sin^3\theta\cos^4\theta - 3\sin^3\theta\cos^2\theta\, d\theta$$

$$= \tfrac{\sqrt{7\pi}}{2} V \int_0^{\pi} d\theta\; 5\sin\theta\cos^4\theta - 5\sin\theta\cos^6\theta - 3\sin\theta\cos^2\theta + 3\sin\theta\cos^4\theta$$

$$= \tfrac{\sqrt{7\pi}}{2} V \left[-\cos^5\theta + \tfrac{5}{7}\cos^7\theta + \cos^3\theta - \tfrac{3}{5}\cos^5\theta\right]_0^{\pi} = \tfrac{\sqrt{7\pi}}{2} V \left(\left(1 - \tfrac{5}{7} - 1 + \tfrac{3}{5}\right) - \left(-1 + \tfrac{5}{7} + 1 - \tfrac{3}{5}\right)\right)$$

$$= -\sqrt{7\pi}\, V\, \tfrac{4}{35}$$

$$\Rightarrow \phi_0 \approx \frac{4\sqrt{3\pi}}{15} V\, Y_1 - \frac{4\sqrt{7\pi}}{35} V\, Y_3$$

Bei Näherung auf auf Glieder bis $l=3$

$\Delta\phi(r,\theta)=0$ für $r\neq R$

Im Innenraum muss $\Delta\phi=0$ sein

Damit $\Delta\phi=0$ muss auch $\Delta\left(\frac{B_l}{r^{l+1}}Y_l(\theta)\right)=0$

$\Delta\frac{1}{r^{l+1}}\Big|_{r=0}\neq 0$ deshalb muss $B_l=0$ gewählt werden.

Koeffizientenvergleich für $r=R$ mit ϕ_0 liefert dann:

$$\phi(R,\theta)\approx\sum_{l=0}^{3}A_l R^l Y_l(\theta)\overset{!}{=}\sum_{l=0}^{3}C_l Y_l(\theta)\quad\Rightarrow C_l=A_lR^l$$

$$A_0^I=A_2^I=0\qquad A_1^I=\frac{4\sqrt{3\pi}}{15}\frac{V}{R}\qquad A_3^I=-\frac{4\sqrt{7\pi}}{35}\frac{V}{R^3}$$

$$\Rightarrow\phi^I(r,\theta)\approx\frac{4\sqrt{3\pi}}{15}V\frac{r}{R}Y_1-\frac{4\sqrt{7\pi}}{35}V\frac{r^3}{R^3}Y_3$$

$$=\frac{2}{5}V\frac{r}{R}\cos\theta-V\frac{r^3}{R}\left(\cos^3\theta-\frac{3}{5}\cos\theta\right)$$

✓

Außerhalb der Kugel muss das Potential für $r\to\infty$ $\to 0$ laufen. Das ist mit einem r^l term nicht möglich, weshalb man $A_l=0$ wählen muss. ✓

Koeffizientenvergleich liefert diesmal:

$$C_l=\frac{B_l}{R^{l+1}}\quad\Rightarrow B_l=C_lR^{l+1}$$

$$\phi^A(r,\theta)=\frac{4\sqrt{3\pi}}{15}V\left(\frac{R}{r}\right)^2Y_1(\theta)-\frac{4\sqrt{7\pi}}{35}V\left(\frac{R}{r}\right)^4Y_3$$

$$=\frac{2}{5}V\left(\frac{R}{r}\right)^2\cos\vartheta-\frac{1}{5}V\left(\frac{R}{r}\right)^4\left(5\cos^3\theta-3\cos\theta\right)$$

✓

/3

Innerhalb des Zylinders gilt $\Delta\phi=0$

$$\Delta\phi=\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\overset{!}{=}0$$

Da das Problem invariant bei Translation entlang der z-Achse ist gilt $\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=0$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}=0\qquad\Big|\ \text{Separationsansatz}\quad\phi(r,\theta)=F(\theta)\cdot G(r)$$

$$FG''+\frac{1}{r}FG'+\frac{1}{r^2}GF''=0$$

$$r^2\frac{G''}{G}+r\frac{G'}{G}=\omega^2=-\frac{F''}{F}$$

Ansatz für $F(\theta)$

$$F=A\sin(\omega\theta)+B\cos(\omega\theta)$$

Ansatz für $\quad G = \gamma r^{\lambda}$

$$r^2 G'' + r G' - \omega^2 G = 0$$

$$r^2 \lambda(\lambda-1) \gamma r^{\lambda-2} + r\gamma\lambda r^{\lambda-1} - \omega^2 \gamma r^{\lambda} = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda + \lambda - \omega^2 = 0$$

$$\lambda = \pm \omega$$

Da $\Delta \phi|_{r=0} = \Delta(F \cdot \gamma r^{\lambda})|_{r=0} = 0$ gelten muss, muss λ positiv sein.

$\Rightarrow \quad \lambda = |\omega|$

Es kann unendlich viele mögliche ω, A, B und γ geben und die Lösung ist die Superposition:

$$\phi(r,\theta) = \sum_{\omega, A, B, \gamma} \gamma r^{|\omega|} \left(A_n \sin(\omega\theta) + B_n \cos(\omega\theta) \right)$$

Das Problem weißt eine Symmetrie $\phi(r,\theta) = \phi(r,-\theta)$ auf.

Deshalb kann der Sinus keinen Term beitragen und man darf $A_n = 0$ wählen.

Randbedingungen: $\phi(r=R,\theta) = V_1$ für $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$

$\phi(r=R,\theta) = V_2$ für $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$

Diese Randbedingungen können als 2π-Periodisch betrachtet werden, obwohl uns natürlich nur $\theta \in [0, 2\pi]$ interessiert.

Randbedingungen als Fourierreihe entwickeln:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(r=R,\theta) \cos(kt)\, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} V_2 \cos(kt)\, dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} V_1 \cos(kt)\, dt + \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} V_2 \cos(kt)\, dt$$

Fall $k=0$: $\quad a_0 = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} V_2 + \pi V_1 + \frac{\pi}{2} V_2 \right) = V_1 + V_2$

Fall $k \neq 0$:

$$= \frac{1}{\pi} \left\{ \left[\frac{V_2}{k} \sin(kt) \right]_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{V_1}{k} \sin(kt) \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{V_2}{k} \sin(kt) \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \right\} =$$

$$a_k = -2 \frac{V_2}{k} \sin(k\tfrac{\pi}{2}) + 2 \frac{V_1}{k} \sin(k\tfrac{\pi}{2})$$

$= 0$ für $k = 2n \qquad n \in \mathbb{N}$

$= 2 \frac{V_1 - V_2}{k\pi}$ für $k = 4n-3$

$= -2 \frac{V_1 - V_2}{k\pi}$ für $k = 4n-1$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(r=R,\theta) \sin(kt)\, dt = 0$$

$$\Rightarrow \phi(r=R,\theta) = \frac{V_1+V_2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{(2k-1)\pi} (V_1 - V_2) \cos((2k-1)\theta)$$

$$\Rightarrow \phi(r=R,\theta) = \frac{V_1+V_2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{(2k-1)\pi}(V_1-V_2)\cos((2k-1)\theta)$$

2k-1 deshalb, weil nur über die ungeraden k summiert werden soll. $(-1)^{k-1}$ weil $k=4n-1$ Terme negativ werden

Koeffizientenvergleich liefert nun mit der Annahme $\omega = m = 0, 1, 2, 3, \ldots$

$$\phi(r=R,\theta) = \frac{V_1+V_2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(V_1-V_2)(-1)^{k-1}}{(2k-1)\pi}\cos((2k-1)\theta) \overset{!}{=} \sum_{m=0}^{\infty} R^m \gamma B_m \cos(m\theta)$$

$$R^0 \gamma B_0 = \frac{V_1+V_2}{2}$$

$$\gamma B_m = \frac{2(V_1-V_2)}{m\pi R^m} \text{ für } m=4n-3 \quad \text{bzw.} \ldots = -\frac{2(V_1-V_2)}{m\pi R^m} \text{ für } m=4n-1$$

$$\Rightarrow \phi(r,\theta) = \frac{V_1+V_2}{2} + 2\frac{V_1-V_2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{2m-1}\left(\frac{r}{R}\right)^{2m-1}\cos((2m-1)\theta)$$

/2 a)

$$\rho(r) = -q\,\delta(\vec r) + 3q\,\delta\left(\vec r - \begin{pmatrix}0\\0\\a\end{pmatrix}\right)$$

$$Q^{(0)} = \int d^3r'\,\rho(r') = 2q$$

$$Q^{(1)} = \int d^3r'\,\vec r'\,\rho(r') = 3q\begin{pmatrix}0\\0\\a\end{pmatrix}$$

$$Q^{(2)}_{ij} = \int d^3r'\,(3r_i'r_j' - r'^2\delta_{ij})\rho(\vec r')$$

$$Q^{(2)} = 3q\begin{pmatrix}-a^2 & 0 & 0\\ 0 & -a^2 & 0\\ 0 & 0 & 2a^2\end{pmatrix}$$

$$\phi(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q^0}{r} + \frac{\vec r\cdot\vec Q^{(1)}}{r^3} + \frac{1}{2}\sum Q_{ij}\frac{x_i x_j}{r^5}\right)$$
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2q}{r} + \frac{3qaz}{r^3} + \frac{3qa^2}{2r^5}(2z^2 - y^2 - x^2)\right)$$

b)

$$\rho(\vec r) = 3q\,\delta(\vec r) - q\,\delta\left(\vec r - \begin{pmatrix}0\\0\\-a\end{pmatrix}\right)$$

$$Q^{(0)} = 2q$$

$$Q^{(1)} = -\begin{pmatrix}0\\0\\-a\end{pmatrix}q = q\begin{pmatrix}0\\0\\a\end{pmatrix}$$

$$Q^{(2)}_{ij} = -q\begin{pmatrix}-a^2 & 0 & 0\\ 0 & -a^2 & 0\\ 0 & 0 & 2a^2\end{pmatrix} = q\begin{pmatrix}a^2 & 0 & 0\\ 0 & a^2 & 0\\ 0 & 0 & -2a^2\end{pmatrix}$$

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2q}{r} + \frac{qaz}{r^3} + \frac{qa^2}{2r^5}(x^2+y^2-2z^2)\right)$$

c)

$$\rho(\vec{r}) = -q\,\delta(\vec{r}) + 3q\,\delta\left(\vec{r}-\begin{pmatrix}a\\0\\0\end{pmatrix}\right)$$

$$Q^{(0)} = 2q$$

$$Q^{(1)} = 3q\begin{pmatrix}a\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$Q^{(2)} = 3qa^2\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2q}{r} + \frac{3qax}{r^3} + \frac{3qa^2}{2r^5}\left(2x^2-y^2-z^2\right)\right)$$

d)

$$\rho = -2q\,\delta(\vec{r}) + q\,\delta\left(\vec{r}-\begin{pmatrix}a\\0\\0\end{pmatrix}\right) + q\,\delta\left(\vec{r}-\begin{pmatrix}0\\0\\-a\end{pmatrix}\right)$$

$$Q^{(0)} = 0$$

$$Q^{(1)} = q\begin{pmatrix}a\\0\\0\end{pmatrix} + q\begin{pmatrix}0\\0\\-a\end{pmatrix} = q\begin{pmatrix}a\\0\\-a\end{pmatrix}$$

$$Q^{(2)} = q\begin{pmatrix}2a^2&0&0\\0&-a^2&0\\0&0&-a^2\end{pmatrix} + q\begin{pmatrix}-a^2&0&0\\0&-a^2&0\\0&0&2a^2\end{pmatrix} = qa^2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{qa(x-z)}{r^3} + \frac{qa^2}{2r^5}\left(x^2-2y^2+z^2\right)\right)$$

e)

Wähle symmetrische Punktladungen so, das Quadrupolterme Null werden

q bei $\begin{pmatrix}a\\0\\0\end{pmatrix}$ $-q$ bei $\begin{pmatrix}-a\\a\\a\end{pmatrix}$

$$Q^{(2)} = qa^2\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix} - qa^2\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

$$Q^{(1)} = q\begin{pmatrix}a\\0\\0\end{pmatrix} + q\begin{pmatrix}a\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$Q^{(0)} - 0$$

$Q^{(1)}$ muss $= 0$ werden. Dafür könnte man zum Beispiel 2 weitere Ladungen hinzufügen:

$-\frac{q}{2}$ bei $\begin{pmatrix}2a\\0\\0\end{pmatrix}$ und $\frac{q}{2}$ bei $\begin{pmatrix}-2a\\0\\0\end{pmatrix}$

$$Q^{(0)} = 0$$

$$Q^{(1)} = q\begin{pmatrix}a\\0\\0\end{pmatrix} + q\begin{pmatrix}a\\0\\0\end{pmatrix} - q\begin{pmatrix}a\\0\\0\end{pmatrix} - q\begin{pmatrix}a\\0\\0\end{pmatrix} = 0$$

$$Q^{(2)} = qa^2\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix} - qa^2\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

$$-\frac{q}{2}a^2\begin{pmatrix}8&0&0\\0&-4&0\\0&0&-4\end{pmatrix} + \frac{q}{2}a^2\begin{pmatrix}8&0&0\\0&-4&0\\0&0&-4\end{pmatrix}$$

$$= 0$$