

Klassische Theoretische Physik III WS 2020/2021**Prof. Dr. M. Garst**
Dr. B. Narozhny**Blatt 6**
Lösungen**1. Kugelflächenfunktionen:**

Betrachten Sie eine Kugelschale mit Radius R , die auf folgendem Potential liegt:

$$\Phi = V \cos \theta \sin^2 \theta, \quad (0 \leq \theta \leq \pi).$$

Berechnen Sie das Potential im Außen- und Innenraum jeweils als Entwicklung in Kugelflächenfunktionen bis zu $l = 3$.

Die Kugelflächenfunktionen

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = N_l^m P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi}, \quad N_l^m = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}}, \quad P_l^0(\xi) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{d\xi^l} (\xi^2 - 1)^l,$$

bilden eine orthonormierte Basis eines abstrakten Vektorraumes. Auf diesem kann man ein Skalarprodukt definieren

$$\langle f, g \rangle = \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi f^*(\theta, \phi) g(\theta, \phi).$$

Die Orthonormierung führt im Fall der Kugelflächenfunktionen zu der Identität

$$\langle Y_{lm}, Y_{l'm'} \rangle = \delta_{l,l'} \delta_{m,m'}.$$

Die Entwicklung einer hinreichend gutartigen Funktion auf der Einheitskugel, $g(\theta, \phi)$ in Kugelflächenfunktionen folgt der Form

$$g(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l C_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi).$$

Die Koeffizienten lassen sich durch Projektion mit Hilfe der Orthonormalitätsrelation bestimmen:

$$\begin{aligned} \langle Y_{lm}, g \rangle &= \left\langle Y_{lm} \sum_{l'=0}^{\infty} \sum_{m'=-l'}^{l'} C_{l'm'} Y_{l'm'} \right\rangle = \sum_{l'=0}^{\infty} \sum_{m'=-l'}^{l'} C_{l'm'} \langle Y_{lm}, Y_{l'm'} \rangle \\ &= \sum_{l'=0}^{\infty} \sum_{m'=-l'}^{l'} C_{l'm'} \delta_{l,l'} \delta_{m,m'} = C_{lm}. \end{aligned}$$

Ausgeschrieben ergibt sich also die Formel für die Koeffizienten von $g(\theta, \phi)$:

$$C_{lm} = \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi Y_{lm}^*(\theta, \phi) g(\theta, \phi).$$

Um das Potential zu entwickeln, betrachten wir es bei der gegebenen Randbedingung $r = R$. Die Koeffizienten sind also

$$C_{lm} = V \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi Y_{lm}^*(\theta, \phi) \cos \theta \sin^2 \theta.$$

Da das Problem rotationssymmetrisch um die z -Achse ist, tragen nur Kugelflächenfunktionen mit $m = 0$ bei, weil alle anderen Kugelflächenfunktionen eine Abhängigkeit vom Winkel ϕ haben. Die einzige ϕ -Abhängigkeit des Integranden kommt aus der Kugelflächenfunktion, welche den Term $e^{im\phi}$ enthält. Da

$$\int_0^{2\pi} e^{im\phi} d\phi = 0 \quad \forall m \neq 0,$$

haben wir damit alle Koeffizienten mit $m \neq 0$ bereits berechnet. Bei $m = 0$ trägt dieses Integral mit einem Faktor von 2π bei.

Es bleibt also das Integral

$$C_{l0} = 2\pi N_l^0 V \int_0^\pi d\theta \sin \theta P_l^0(\cos \theta) \cos \theta \sin^2 \theta$$

zu berechnen. Durch die bekannte Substitution $\xi = \cos \theta$, erhalten wir

$$C_{l0} = 2\pi N_l^0 V \int_{-1}^1 d\xi P_l^0(\xi) \xi (1 - \xi^2) = 2\pi N_l^0 V \int_0^1 d\xi [P_l^0(\xi) - P_l^0(-\xi)] \xi (1 - \xi^2).$$

Für alle *geraden* Polynomen verschwinden dann die Koeffizienten

$$C_{2k0} = 0 \quad \Rightarrow \quad C_{00} = C_{20} = \dots = 0.$$

Ungerade Polynomen bis zu $l = 3$ sind

$$P_1^0 = x, \quad P_3^0 = \frac{1}{2} (5x^3 - 3x).$$

Deswegen

$$C_{10} = 2\pi V \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{4}{15} = \frac{4V}{5} \sqrt{\frac{\pi}{3}}, \quad C_{30} = 2\pi V \sqrt{\frac{7}{4\pi}} \left(-\frac{4}{35}\right) = -\frac{4V}{5} \sqrt{\frac{\pi}{7}}.$$

Das Potential im Innenraum

Im Innenraum muss das Potential bei $r = 0$ wohldefiniert sein, d.h. Terme $r^{-(l+1)}$ dürfen nicht auftreten. Daher müssen die B_{lm} im Innenraum gleich 0 sein und die A_{lm} sind dann durch

$$A_{lm} = C_{lm}/R^l$$

gegeben, wenn man Φ am Rand bei $r = R$ auswertet und dann C_{lm} mit $A_{lm}r^l$ gleichsetzt. Auf diesem Weg erhalten wir

$$\Phi(r \leq R, \theta, \phi) = \sum_l C_{l0} \frac{r^l}{R^l} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l^0(\cos \theta),$$

und die ersten Terme sind

$$\Phi(r \leq R, \theta, \phi) \approx \frac{2V}{5} \frac{r}{R} \cos \theta \left[1 - \frac{r^2}{2R^2} (5 \cos^2 \theta - 3) + \dots \right].$$

Das Potential im Außenraum

Im Außenraum muss das Potential bei $r = \infty$ verschwinden, d.h. Terme r^l dürfen nicht auftreten. Daher müssen die A_{lm} im Außenraum gleich 0 sein und für die B_{lm} erhält man

$$B_{lm} = C_{lm} R^{l+1}.$$

Die Entwicklung des Potentials ist damit durch

$$\Phi(r \geq R, \theta, \phi) = \sum_l C_{l0} \frac{R^{l+1}}{r^{l+1}} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l^0(\cos \theta)$$

gegeben und die ersten Terme sind

$$\Phi(r \geq R, \theta, \phi) \approx \frac{2V}{5} \frac{R^2}{r^2} \cos \theta \left[1 - \frac{R^2}{2r^2} (5 \cos^2 \theta - 3) + \dots \right].$$

2. Multipolentwicklung:

Berechnen Sie das Potential in großer Entfernung $r \gg a$ als Multipolentwicklung (bis zu max. Quadrupoltermen) der folgenden Punktladungsverteilungen:

Im kartesischen Koordinatensystem sind die Multipolmomente für eine Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ wie folgt definiert:

$$\text{Monopol} \quad q_m = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r \rho(\vec{r})$$

$$\text{Dipol} \quad \vec{d} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r r \vec{r} \rho(\vec{r})$$

$$\text{Quadrupol} \quad Q_{\alpha\beta} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r (3r_\alpha r_\beta - r^2 \delta_{\alpha\beta}) \rho(\vec{r})$$

Für eine diskrete Ladungsverteilung $\rho(\vec{r}) = \sum_a q_a \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_a)$ ergeben sich folgende Formen:

$$\text{Monopol} \quad q_m = \sum_a q_a$$

$$\text{Dipol} \quad \vec{d} = \sum_a \vec{r}_a q_a$$

$$\text{Quadrupol} \quad Q_{\alpha\beta} = \sum_a (3r_{a,\alpha} r_{a,\beta} - r_a^2 \delta_{\alpha\beta}) q_a$$

Für die Näherung des Potentials im Fernfeld gilt der Ausdruck

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_m}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{d}}{r^3} + \frac{1}{2} \frac{Q_{\alpha\beta} r_\alpha r_\beta}{r^5} + \dots \right), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

(a) Ladung $-q$ im Ursprung, $3q$ bei $(0, 0, a)$

Das Monopolmoment:

$$q_m = -q + 3q = 2q.$$

Das Dipolmoment:

$$\vec{d} = 3qa\vec{e}_z.$$

Das Quadrupolmoment ist

$$Q_{\alpha\beta} = 3qa^2(3\delta_{\alpha,z}\delta_{\beta,z} - \delta_{\alpha\beta}) \quad \Rightarrow \quad \hat{Q} = -3qa^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Somit ist das Potential im Fernfeld durch

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2q}{r} + \frac{3qaz}{r^3} + \frac{3qa^2}{2r^5} (2z^2 - x^2 - y^2) + \dots \right)$$

gegeben.

(b) *Ladung $3q$ im Ursprung, $-q$ bei $(0, 0, -a)$*

Das Monopolmoment:

$$q_m = 3q - q = 2q.$$

Das Dipolmoment:

$$\vec{d} = qa\vec{e}_z.$$

Das Quadrupolmoment ist

$$Q_{\alpha\beta} = -qa^2(3\delta_{\alpha,z}\delta_{\beta,z} - \delta_{\alpha\beta}) \quad \Rightarrow \quad \hat{Q} = qa^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Somit ist das Potential im Fernfeld durch

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2q}{r} + \frac{qaz}{r^3} + \frac{qa^2}{2r^5}(x^2 + y^2 - 2z^2) + \dots \right)$$

gegeben.

(c) *Ladung $-q$ im Ursprung, $3q$ bei $(a, 0, 0)$*

Das Monopolmoment:

$$q_m = -q + 3q = 2q.$$

Das Dipolmoment:

$$\vec{d} = 3qa\vec{e}_x.$$

Das Quadrupolmoment ist

$$Q_{\alpha\beta} = 3qa^2(3\delta_{\alpha,x}\delta_{\beta,x} - \delta_{\alpha\beta}) \quad \Rightarrow \quad \hat{Q} = 3qa^2 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Somit ist das Potential im Fernfeld durch

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2q}{r} + \frac{3qax}{r^3} + \frac{3qa^2}{2r^5}(2x^2 - y^2 - z^2) + \dots \right)$$

gegeben.

(d) *Ladung $-2q$ im Ursprung, q bei $(a, 0, 0)$, q bei $(0, 0, -a)$*

Das Monopolmoment:

$$q_m = -2q + q + q = 0.$$

Das Dipolmoment:

$$\vec{d} = qa\vec{e}_x - qa\vec{e}_z.$$

Das Quadrupolmoment ist

$$Q_{\alpha\beta} = qa^2(3\delta_{\alpha,x}\delta_{\beta,x} + 3\delta_{\alpha,z}\delta_{\beta,z} - 2\delta_{\alpha\beta}) \quad \Rightarrow \quad \hat{Q} = qa^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Somit ist das Potential im Fernfeld durch

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{qa(x-z)}{r^3} + \frac{qa^2}{2r^5}(x^2 - 2y^2 + z^2) + \dots \right)$$

gegeben.

- (e) Finden Sie eine Konfiguration von Punktladungen auf einer Linie, so dass die Multipolentwicklung des Potentials mit dem Oktupolterm beginnt.

Da man mit 3 Ladungen auf einer Linie immer ein endliches Quadrupolmoment erhält, wenn Monopol- und Dipolmomente verschwinden, nehmen wir den Ansatz, dass wir vier Ladungen haben.

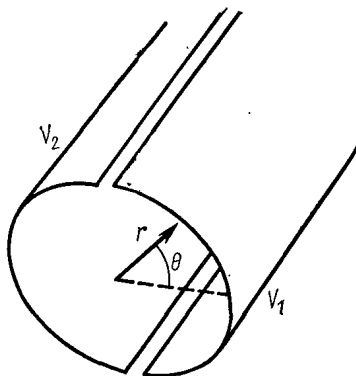
Lösungsvorschlag:

$$q_1 = q, x_1 = -na; \quad q_2 = -nq, x_2 = -a; \quad q_3 = nq, x_3 = a; \quad q_4 = -q, x_4 = na.$$

3. Leitender Zylinder:

(30 Punkte)

Betrachten Sie einen Leiter, der die Form einer zylindrischen Oberfläche hat, und in zwei Teile geschnitten wird (siehe Abbildung). Die zwei Halbzylinder sind voneinander isoliert und liegen auf unterschiedlichen Potentialen V_1 und V_2 (die Dicke der isolierenden Schicht zwischen den Teilen ist viel kleiner als der Radius, $\delta \ll R$).



Zeigen Sie, dass das Skalarpotential innerhalb des Zylinders durch

$$\Phi = \frac{V_1 + V_2}{2} + 2 \frac{V_1 - V_2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{2m-1} \left(\frac{r}{R}\right)^{2m-1} \cos[(2m-1)\theta],$$

gegeben ist.

Wir verwenden den Separationsansatz von Aufgabe 2. Dann

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^m [A_m \cos(m\theta) + B_m \sin(m\theta)].$$

Auf der Oberfläche

$$\Phi(r = R, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} [A_m \cos(m\theta) + B_m \sin(m\theta)].$$

Die Funktion $\Phi(r = R, \theta)$ ist durch der Randbedingungen gegeben und zwar

$$\Phi(r = R, \theta) = \begin{cases} V_1, & -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}, \\ V_2, & \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}. \end{cases}$$

Die Wahl der genauen Randbedingungen ist auf der Bild gezeichnet. Dann hat das Potential auf der Oberfläche die folgende Eigenschaft

$$V(R, \theta) = V(R, -\theta).$$

Dann können wir den Ansatz vereinfachen, weil in diesem Fall gilt es

$$B_m = 0.$$

Die Koeffizienten A_m finden wir von der Fourier-Entwicklung. Wir vergleichen die zwei Fourier-Integrale:

$$\int_{-\pi/2}^{3\pi/2} V(R, \theta) \cos(n\theta) d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} V_1 \cos(n\theta) d\theta + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} V_2 \cos(n\theta) d\theta = \frac{2(V_1 - V_2)}{n} \sin \frac{n\pi}{2}, \quad n \neq 0,$$

und

$$\int_{-\pi/2}^{3\pi/2} V(R, \theta) \cos(n\theta) d\theta = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \cos(m\theta) \cos(n\theta) d\theta = \pi A_n, \quad n \neq 0.$$

Für $n = 0$ finden wir

$$\int_{-\pi/2}^{3\pi/2} V(R, \theta) d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} V_1 d\theta + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} V_2 d\theta = \pi(V_1 + V_2),$$

$$\int_{-\pi/2}^{3\pi/2} V(R, \theta) d\theta = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \cos(m\theta) d\theta = 2\pi A_0.$$

Deswegen

$$2\pi A_0 = \pi(V_1 + V_2), \quad \pi A_{n \neq 0} = \frac{2(V_1 - V_2)}{n} \sin \frac{n\pi}{2}.$$

Das ergibt das Ergebnis

$$\Phi = \frac{V_1 + V_2}{2} + 2 \frac{V_1 - V_2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \left(\frac{r}{R} \right)^{2k-1} \cos [(2k-1)\theta],$$