Blatt 7 Tobias

95 /100

Mittwoch, 16. Dezember 2020 15:38

Für die Multipolentwicklung in Kugelkoordinaten gilt laut Vorlesung:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{q_{lm}}{r^{l+1}} Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

Mit: $q_{lm} = \int d\vec{r}\,' \rho(\vec{r}\,') r'^l Y^*_{lm}(\theta',\varphi)$

Die zwei Ringe dieses Problems sind offensichtlich rotationssymmetrisch zur z-Achse, weshalb man $m=0$ wählen darf. ✓

Die gegebene Ladungsdichte lautet:

$$\rho(r,\theta,\varphi) = \frac{\delta(r-\sqrt{R^2+a^2})}{\sqrt{R^2+a^2}} \left[\frac{q_1}{2\pi R}\delta(\theta-\arctan(\tfrac{R}{a})) + \frac{q_2}{2\pi R}\delta(\theta-(\pi-\arctan(\tfrac{R}{a})))\right]$$

Die Kugelflächenfunktionen sind aus der Vorlesung bekannt:

$\sqrt{\frac{1}{4\pi}}$	$\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\vartheta$	$\sqrt{\frac{5}{16\pi}}(3\cos^2\vartheta-1)$

$$q_{00} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} \rho(r')\sqrt{\tfrac{1}{4\pi}}\, r'^2 \sin\theta'\, dr'\, d\theta'\, d\varphi'$$

$$= \sqrt{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} \rho(r')\, r'^2 \sin\theta\, dr'\, d\theta'$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{R^2+a^2}}\, r'^2\Big|_{r'=\sqrt{R^2+a^2}} \left[\frac{q_1}{2\pi R}\sin\theta'\Big|_{\theta'=\arctan(\frac{R}{a})} + \frac{q_2}{2\pi R}\sin\theta'\Big|_{\theta'=\pi-\arctan(\frac{R}{a})}\right]$$

$$= \sqrt{\pi}\sqrt{R^2+a^2}\left[\frac{q_1}{2\pi R}\frac{R}{a\sqrt{\frac{R^2}{a^2}+1}} + \frac{q_2}{2\pi R}\frac{R}{a\sqrt{\frac{R^2}{a^2}+1}}\right]$$

$$= \frac{q_1+q_2}{2\sqrt{\pi}} \checkmark$$

$$q_{10} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} \rho(r')\sqrt{\tfrac{3}{4\pi}}\cos\theta'\, r' r'^2 \sin\theta'\, dr'\, d\theta'\, d\varphi'$$

$$= \sqrt{3\pi}\,(R^2+a^2)\left[\frac{q_1}{2\pi R}\sin\theta'\cos\theta'\Big|_{\theta'=\arctan(\frac{R}{a})} + \frac{q_2}{2\pi R}\sin\theta'\cos\theta'\Big|_{\theta'=\pi-\arctan(\frac{R}{a})}\right]$$

$$= \sqrt{3\pi}\,(R^2+a^2)\left[\frac{q_1}{2\pi}\frac{a}{(R^2+a^2)} - \frac{q_2}{2\pi}\frac{a}{R^2+a^2}\right]$$

$$= \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\,(q_1-q_2)\,a \checkmark$$

$$q_{20} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} \rho(r') \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3\cos^2\theta' - 1)\, r'^2 \cdot r'^2 \sin\theta'\, dr'\, d\theta'\, d\varphi'$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} \rho(r') \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3\cos^2\theta')\, r'^4 \sin\theta'\, dr'\, d\theta'\, d\varphi' - \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (q_1+q_2)(R^2+a^2)$$

$$= \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (R^2+a^2)^{\frac{3}{2}} \left[q_1 a^2 (a^2+R^2)^{-\frac{3}{2}} + q_2 a^2 (a^2+R^2)^{-\frac{3}{2}} \right] - \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (q_1+q_2)(R^2+a^2)$$

$$= \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (q_1+q_2) \left[3a^2 - (R^2+a^2) \right] \checkmark$$

$$\Rightarrow \phi(\vec{r}) = \frac{q_1+q_2}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \frac{1}{r\varepsilon_0} + \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\, a\, (q_1-q_2) \frac{1}{3r^2\varepsilon_0} \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta$$

$$+ \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (q_1+q_2) \left[3a^2 - (R^2+a^2) \right] \frac{1}{5r^3\varepsilon_0} \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (\cos^2\theta - 1)$$

$$= \frac{q_1+q_2}{4\pi r\varepsilon_0} + \frac{(q_1-q_2)\, a}{4\pi r^2 \varepsilon_0} \cos\theta + \frac{(q_1+q_2)\left[3a^2 - (R^2+a^2)\right]}{16\pi\, r^3\, \varepsilon_0} (\cos^2\theta - 1)$$

Für $q_1 = q_2$ verschwindet $q_1 - q_2 \Rightarrow q_{10} = 0$ ✓

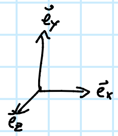
" $q_1 = -q_2$ " $q_1 + q_2 \Rightarrow q_{00} = q_{20} = 0$ ✓

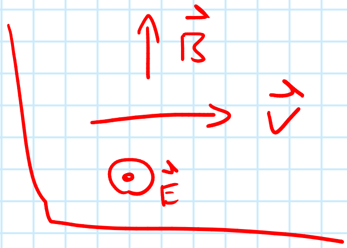
/2

$\vec v = v\,\vec e_x$

$\vec B = B\,\vec e_y$

$\vec E = E\,\vec e_z$





$\Leftrightarrow \quad \vec v \times \vec B = vB\,\hat e_z$

entweder $\vec E$ oder $\vec B$ muss umgekehrt ausgerichtet sein.

-5

Ohne Ablenkung gilt:

$\vec F_L + \vec F_E = 0$

$|\vec F_L| = |\vec F_E|$

$|q\,\vec v \times \vec B| = |q\,\vec E|$

$qvB = qE$

$v = \frac{E}{B}$ ✓

b) $\vec F_z + \vec F_L = 0$

$|\vec F_z| = |\vec F_L|$

$\frac{mv^2}{R} = qvB$

$\frac{q}{m} = \frac{v}{RB}$

$\frac{q}{m} = \frac{E}{RB^2}$ ✓

/3

liege die Platte in der XY Ebene mit Mittelpunkt in $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

und drehe sich gegen den Uhrzeigersinn $\vec\omega = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$\vec j = \rho\cdot\vec v = \sigma\,\delta(z)\,\vec\omega\times\vec r = \sigma\,\delta(z)\,\omega r\,\vec e_\varphi$

$\Rightarrow \quad j(r)\big|_{z=0} = \sigma\omega r$ ✓

b) $\rho(r,\varphi,\theta) = \frac{3Q}{4\pi R^3}\,\Theta(R-r)$

$\vec j(\vec r) = \rho\cdot\vec v = \rho\cdot\vec\omega\times\vec r$

$\Rightarrow \vec j(r,\theta) = \rho\,\omega\,r\sin\theta\,\vec e_\varphi$

$\vec j(r,\theta) = \sin\theta\,\frac{3Q\omega r}{4\pi R^3}\,\Theta(R-r)\,\vec e_\varphi$ ✓

/4

$\vec{j}(r) = [I n_1 \delta(r-a) - I n_2 \delta(r-b)]\, \vec{e}_\varphi$

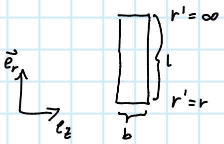
Das B Feld wird immer rotationssymmetrisch um die z Achse sein: $\vec{B} = \vec{B}(r,z)$

Und translationssymmetrisch bzgl. der z-Achse $\vec{B} = \vec{B}(r)$

Das $\vec{B}$ Feld hat nur $\vec{e}_z$ Komponente

$\vec{B} = B(r)\, \vec{e}_z$ ✓

Sei C ein Rechteck:



$$\oint_C \vec{B}\, d\vec{l} = \mu_0 \int_C \vec{j}\, d\vec{f}$$

$$B\big|_{r'=r}\, b + 2B(r') L \underbrace{\vec{e}_r \cdot \vec{e}_z}_{=0} + \underbrace{B\big|_{r'=\infty}}_{=0} b = \mu_0\, b\, I\, (n_1 - n_2)$$

$$B(r) = \mu_0 I\, (n_1 - n_2) \quad ✓$$

b) gleiches Verfahren für zwischen den beiden Spulen

$$\oint_c \vec{B}\, d\vec{l} = \mu_0 \int_c \vec{j}\, d\vec{f}$$

$$B(r)\, b = -\mu_0\, b\, I\, n_2$$

$$B(r) = -\mu_0 I n_2 \quad ✓$$

c)

$$\oint_c \vec{B}\, d\vec{l} = \mu_0 \int_c \vec{j}\, d\vec{f}$$

$$B(r)\, b = 0$$

$$B(r) = 0 \quad ✓$$