

Klassische Theoretische Physik III WS 2020/2021

Prof. Dr. M. Garst
Dr. B. NarozhnyBlatt 7
Lösungen

1. Multipolentwicklung:

Zwei Kreisringe [Radius R und Mittelpunkt $(0, 0, a)$ bzw. $(0, 0, -a)$] sind homogen mit der Ladung q_1 bzw. q_2 geladen und liegen in den Ebenen $z = a$ bzw. $z = -a$. Berechnen Sie das Potential als Multipolentwicklung in Kugelkoordinaten bis einschließlich dem Quadrupolterm im Bereich $r \gg \sqrt{R^2 + a^2}$. Welche Terme verschwinden für $q_1 = q_2$, bzw. $q_1 = -q_2$?

Da die Ringe homogen sind, besteht keinerlei ϕ -Abhängigkeit.

Die Multipolentwicklung in Kugelkoordinaten:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{q_{lm}}{r^{l+1}} Y_{lm}(\theta, \phi) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l+1} \frac{q_{l0}}{r^{l+1}} Y_{l0}(\theta, \phi).$$

Die Kugelflächenfunktionen in Kugelkoordinaten:

l	m	$Y_{lm}(\theta, \phi)$
0	0	$\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$
1	0	$\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$
1	1	$-\sqrt{\frac{3}{8\pi}} e^{i\phi} \sin \theta$
2	0	$\sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1)$
2	1	$-\sqrt{\frac{15}{8\pi}} e^{i\phi} \sin \theta \cos \theta$
2	2	$\sqrt{\frac{15}{32\pi}} e^{2i\phi} \sin^2 \theta$

Da das Problem rotationssymmetrisch um die z -Achse ist, fallen in der Entwicklung alle $m \neq 0$ -Terme weg (siehe Aufgabe 1). Damit bleiben hier nur die drei Momente q_{00} , q_{10} und q_{20} übrig bis $l = 2$.

Im Kartesischen gilt, dass das Monopolmoment einfach die Summe aller Ladungen ist, d.h. $q_m = q_1 + q_2$. Das sphärische Monopolmoment ist durch

$$q_{0,0} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int d^3r \rho(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} (q_1 + q_2),$$

gegeben.

Das Dipolmoment kann aus Symmetriegründen nur in z -Richtung zeigen und muss daher im Kartesischen $\mathbf{d} = a(q_1 - q_2)\mathbf{e}_z$ sein. Das sphärische Dipolmoment ist durch

$$q_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \int d^3r \rho(\mathbf{r}) z = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} a(q_1 - q_2).$$

gegeben.

Hier $\rho(\mathbf{r})$ ist die Gesamtladungsdichte

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{\delta(r - \sqrt{R^2 + a^2})}{2\pi(R^2 + a^2)} \left[q_1 \delta\left(\cos\theta - \frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}}\right) + q_2 \delta\left(\cos\theta + \frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}}\right) \right].$$

Das Quadrupolmoment ist

$$q_{20} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} \int d^3r (3z^2 - r^2) \rho(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (q_1 + q_2) [2a^2 - R^2].$$

Die Entwicklung des Potentials für allgemeine q_1, q_2 im Fernfeld ergibt also den Ausdruck

$$\Phi(\mathbf{r}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_1 + q_2}{r} + \frac{a(q_1 - q_2)}{r^2} \cos\theta + \frac{(2a^2 - R^2)(q_1 + q_2)}{4r^3} (3\cos^2\theta - 1) \right].$$

Bei $q_1 = q_2$ verschwindet das Dipolmoment, bei $q_1 = -q_2$ verschwinden die Monopol- und Quadrupolmomente. Dass das Quadrupolmoment hier verschwindet liegt allerdings an der Wahl des Koordinatensystems, nur das Monopolmoment verschwindet immer in jedem Koordinatensystem für $q_1 = -q_2$.

2. Entdeckung der Elektronen:

Im Jahre 1897 "entdeckte" J. J. Thomson das Elektron durch Messung des Ladungs-Masse-Verhältnisses von "Kathodenstrahlen" (Elektronenströme mit Ladung q und Masse m).

- (a) *Zuerst führte er den Strahl durch gleichmäßige gekreuzte elektrische und magnetische Felder, $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ (gegenseitig und beide senkrecht zum Strahl) und justierte das elektrische Feld so lange, bis er keine Ablenkung mehr hatte. Wie hoch war die Geschwindigkeit der Teilchen in Bezug auf $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$?*

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + \frac{q}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B},$$

$$\mathbf{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad E = \frac{v}{c} B \quad \Rightarrow \quad v = c \frac{E}{B}.$$

- (b) Dann schaltete er das elektrische Feld aus und maß den Radius der Krümmung des Strahls R (abgelenkt durch das Magnetfeld). Wie ist das Verhältnis von Ladung zu Masse (q/m) der Teilchen in Bezug auf $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ und R ?

$$q \frac{v}{c} B = \frac{mv^2}{R},$$

$$\frac{q}{m} = \frac{vc}{BR} = \frac{c^2 E}{B^2 R}.$$

3. Schallplatte:

- (a) Eine Schallplatte trägt eine gleichmäßige Dichte “statischer Elektrizität”, σ . Wenn sie sich mit Winkelgeschwindigkeit ω dreht, wie hoch ist die Oberflächenstromdichte in einer Entfernung r vom Zentrum?

$$v = \omega r \quad \Rightarrow \quad J_{\square} = \sigma \omega r.$$

- (b) Eine gleichmäßig geladene Festkörperkugel mit dem Radius R und der Gesamtladung Q ist am Ursprung zentriert und dreht sich mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit ω um die z -Achse. Ermitteln Sie die Stromdichte $\mathbf{J}$ an einem beliebigen Punkt (r, θ, ϕ) innerhalb der Kugel.

$$\mathbf{v} = \omega r \sin \theta \mathbf{e}_{\phi},$$

$$\mathbf{J} = \rho \omega r \sin \theta \mathbf{e}_{\phi},$$

wobei

$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{3Q}{4\pi R^3}.$$

4. Ampère-Gesetz

Zwei lange, schlanke Spulen mit Radien $a < b$ sind wie in Skizze auf der x -Achse angeordnet. Sie werden jeweils in entgegengesetzte Richtungen vom Strom I durchflossen. Die innere Spule hat Windungszahl n_1 pro Einheitslänge, die äussere Spule Windungszahl n_2 pro Einheitslänge.

Berechnen Sie das Magnetfeld für die Bereiche:

(a) *Innerhalb der inneren Spule*

Für die Lösung der Aufgabe benutzen wir das Ampère'sche Gesetz

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j},$$

jedoch in der Integralform

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int d\mathbf{A} \cdot \mathbf{j}.$$

Um das Magnetfeld im Inneren der beiden Spulen zu berechnen, legen wir ein Rechteck auf die $y - z$ Ebene, dessen zwei Seiten parallel zur x -Achse verlaufen. Eine dieser Seiten liegt innerhalb der inneren Spule, die andere Seite außerhalb der äußeren Spule (siehe Skizze a).

Für lange schlanke Spulen ist das Magnetfeld im Inneren der Spule homogen und parallel zur x -Achse ausgerichtet, sofern man weit genug von deren Ende entfernt ist. Das Feld außerhalb der Spule muss null sein, damit das Magnetfeld im Unendlichen verschwindet.

Somit finden wir

$$(B_i - \underbrace{B_{\text{außen}}}_{=0})h = \mu_0 I h (n_1 - n_2) \quad \Rightarrow \quad B_i = \mu_0 I (n_1 - n_2).$$

(b) *Zwischen den beiden Spulen*

Um das Magnetfeld im Zwischenraum zu berechnen, integrieren wir die Integralform des Ampère'schen Gesetzes über die Fläche b aus der Querschnittsfäche. Da das Magnetfeld der inneren Spule hier keinen Einfluss mehr hat (siehe Begründung aus Teilaufgabe a) ergibt sich

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int d\mathbf{A} \cdot \mathbf{j} \quad \Rightarrow \quad B_z = -\mu_0 n_2.$$

(c) *Ausserhalb beider Spulen*

$$B_{\text{außen}} = 0.$$

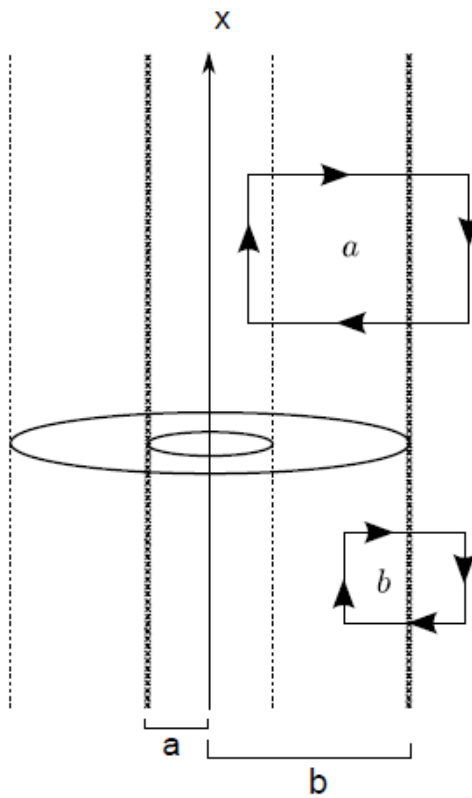


Abbildung 1: Schematische Skizze der Querschnittsfläche durch die beiden Spulen. Der Strom durch die Spulen fließt in unterschiedliche Richtungen und zeigt senkrecht auf die Bildebene (Punkte zeigen aus der Ebene hinaus, Kreuze zeigen in die Ebene hinein).