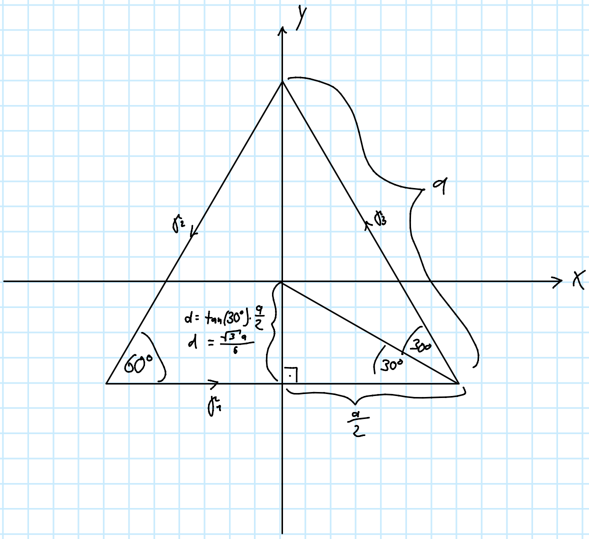
Blatt 8 Tobias

Mittwoch, 23. Dezember 2020 11:48

94 / 100

/1 a) a1)



Sei das Dreieck die Summe der drei Kurven $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3} I \, \frac{d\vec{s} \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}$$

Mit $\vec{\gamma}_1(t) = \begin{pmatrix} -\frac{a}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}a}{6} \\ 0 \end{pmatrix} + t\,\vec{e}_x \qquad t \in [0, a]$

$$\Rightarrow B_{\gamma_1}(z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^a I \, \frac{\vec{e}_x \times (z\vec{e}_z - \vec{\gamma}_1(t))}{|z\vec{e}_z - \vec{\gamma}_1(t)|^3} \, dt$$

NR: $z\vec{e}_z - \vec{\gamma}_1(t) = \frac{a}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \end{pmatrix} + z\vec{e}_z - t\vec{e}_x$

$$|z\vec{e}_z - \vec{\gamma}_1(t)| = \sqrt{\left(\frac{a}{2} - t\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + z^2}$$

$$= \sqrt{\frac{a^2}{4} - at + t^2 + \frac{a^2}{12} + z^2}$$

$$= \sqrt{t^2 - at + \frac{a^2}{3} + z^2}$$

$$\vec{e}_x \times (z\vec{e}_z - \vec{r}_1) = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - z \\ \frac{a}{2\sqrt{3}} - 0 \end{pmatrix}$$

Die Komponenten des B feldes, die in der xy-Ebene liegen addieren sich aufgrund der Symmetrie des Dreiecks zu 0.

Die Summe der Felder hat nur eine z Komponente und es gilt

$$B_z(z) = 3B_{\gamma_1 z}(z) = \frac{3\mu_0}{4\pi} \int_0^a I \, \frac{\frac{a}{2\sqrt{3}}}{\sqrt{t^2 - at + \frac{a^2}{3} + z^2}^{\,3}} \, dt$$

$$= \frac{\sqrt{3}\mu_0 a I}{8\pi} \int_0^a \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a}{2} - t\right)^2 + \frac{a^2}{12} + z^2}^{\,3}} \, dt$$

$$= \frac{\sqrt{3}\mu_0 a I}{8\pi} \int_{u(0)}^{u(a)} \frac{-\sqrt{\frac{a^2}{12} + z^2}}{\sqrt{\left(\frac{a^2}{12} + z^2\right)(u^2+1)}^{\,3}} \, du$$

| Subst: $\frac{a}{2} - t = \sqrt{\frac{a^2}{12} + z^2}\; u$
$\frac{dt}{du} = -\sqrt{\frac{a^2}{12} + z^2}$
$u = \frac{\frac{a}{2} - t}{\sqrt{\frac{a^2}{12} + z^2}}$

$$= -\frac{\sqrt{3}\mu_0 a I}{8\pi} \int_{u(0)}^{u(a)} \frac{1}{\left(\frac{a^2}{12} + z^2\right)(u^2+1)^{\frac{3}{2}}} \, du$$

| Subst $u = \tan s$ $\quad \frac{du}{ds} = \frac{1}{\cos^2 s}$
$s = \arctan u$

$$= \frac{-\sqrt{3}\mu_0 I}{\ldots} \int^{s(u(a))} \frac{ds}{\ldots}$$

| NR: $(u^2+1)^{-\frac{3}{2}} = \left(\frac{\sin^2 s}{\ldots}\right)^{-\frac{3}{2}} \ldots$

$$= \frac{\ldots}{8\pi} \int_{u(0)} \frac{\ldots}{\left(\frac{a^2}{12}+z^2\right)(u^2+1)^{\frac{3}{2}}} \qquad \Big| \; s = \arctan u$$

$$= \frac{-\sqrt{3}\mu_0 I}{8\pi\left(\frac{a}{12}+\frac{z^2}{a}\right)} \int_{s(u(0))}^{s(u(a))} \frac{ds}{(\tan^2 s+1)^{3/2}\cdot\cos^2 s} \qquad \Big| \; NR: (\tan^2 s+1)^{-\frac{3}{2}} = \left(\frac{\sin^2 s}{\cos^2 s}+1\right)^{-\frac{3}{2}} = \left(\frac{1}{\cos^2 s}\right)^{-\frac{3}{2}} = \cos^3 s$$

$$= \frac{-\sqrt{3}\mu_0 I}{8\pi\left(\frac{a}{12}-\frac{z^2}{a}\right)} \int_{s(u(0))}^{s(u(a))} \cos s \, ds$$

$$= \frac{-\sqrt{3}\mu_0 I}{8\pi\left(\frac{a}{12}+\frac{z^2}{a}\right)} \Big[\sin s\Big]_{\arctan\left(\left(\frac{a^2}{12}+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{a}{2}\right)}^{\arctan\left(-\left(\frac{a^2}{12}+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{a}{2}\right)}$$

$$= \frac{-\sqrt{3}\mu_0 I a}{8\pi\left(\frac{a^2}{12}+z^2\right)} \left(\frac{a}{\sqrt{\frac{a^2}{12}+z^2}\sqrt{1+\frac{(a/2)^2}{\frac{a^2}{12}+z^2}}}\right)$$

$$= \frac{-\sqrt{3}\mu_0 I a^2}{8\pi\left(\frac{a^2}{12}+z^2\right)} \frac{1}{\sqrt{\frac{a^2}{3}+z^2}}$$ ✓

a2)

$$\vec{m} = I A \vec{n} = I \cdot \frac{1}{2} a \frac{\sqrt{3}}{2} a \, \vec{e}_z$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 I \vec{e}_z$$ ✓

a3) $$\vec{B}_D(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{m}\vec{r})\cdot\vec{r} - \vec{m} r^2}{r^5}$$

$$\vec{B}_{Dz}(z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} a^2 I}{z^3} \vec{e}_z$$

Dieses Feld sollte ? der Fernfeldentwicklung des $\vec{B}(z)$ aus Aufgabe a1) entsprechen

−3

/b)

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r \left[\vec{r} \times \vec{j}(\vec{r})\right]$$

mit $\int_{\mathbb{R}^3} \vec{j}(\vec{r})\, d^3r = \int_\gamma I \, d\vec{s}$

folgt

$$\vec{m} = \frac{I}{2} \int_\gamma \vec{r} \times d\vec{s}$$

Man wähle das Koordinatensystem so, dass die ebene Leiterschleife in der xy-Ebene liegt

$$\vec{m} = \frac{I}{2} \int_\gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x\,dy - y\,dx \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{Satz von Green}}{=} I A \vec{e}_z$$

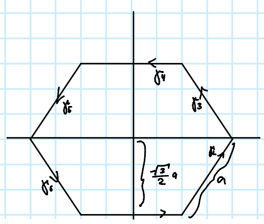
$$\vec{m} = I A \vec{n}$$

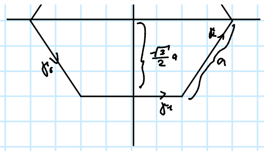
Damit gilt diese Formel auch für nicht kreisförmige Leiterschleifen

aber flache

−3

c)





Das Integral des Magnetischen Feldes
lässt sich Analog zu a1) berechnen mit

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} -\frac{a}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}a \\ 0 \end{pmatrix} + t\,\vec{e}_x \qquad t \in [0, a]$$

$$\Rightarrow B_z(z) = 6\, B_{\gamma_1 0} = \frac{6 \mu_0 I}{4\pi} \int_0^a \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\sqrt{(t-\frac{a}{2})^2 + \frac{3a^2}{4} + z^2}^{\,3}}\, dt \qquad \text{Subst: } t - \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} + z^2}\, u$$

$$= \frac{6\sqrt{3}\,\mu_0 I a}{8\pi} \int_{u(0)}^{u(a)} \frac{\sqrt{\frac{3a^2}{4} + z^2}}{\sqrt{(\frac{3a^2}{4} + z^2)(u^2+1)}^{\,3}}\, du \qquad \text{Subst: } u = \tan s$$

$$= \frac{6\sqrt{3}\,\mu_0 I a}{8\pi} \frac{1}{\frac{3a^2}{4} + z^2} \int_{s(u(0))}^{s(u(a))} \cos s\, ds$$

$$= \frac{6\sqrt{3}\,\mu_0 I a}{8\pi} \frac{1}{\frac{3a^2}{4} + z^2} \left(\frac{a}{\sqrt{\frac{3a^2}{4} + z^2}\sqrt{1 + \frac{a^2/4}{\frac{3a^2}{4} + z^2}}} \right)$$

$$= \frac{3\sqrt{3}\,\mu_0 I a^2}{4\pi (\frac{3a^2}{4} + z^2)} \frac{1}{\sqrt{a^2 + z^2}} \quad ✓$$

d)

B-Feld: $\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_\gamma \frac{d\vec{r}\,' \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}$

Lorentzkraft $\vec{F} = I \oint_\gamma d\vec{r} \times \vec{B}$

$$\Rightarrow \vec{F} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \oint_\gamma d\vec{r} \times \oint_\gamma \frac{d\vec{r}\,' \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}$$

$$= \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \oint_\gamma \oint_\gamma \left(\frac{d\vec{r}\,'(d\vec{r}\,(\vec{r} - \vec{r}\,'))}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} - (\vec{r} - \vec{r}\,') \frac{(d\vec{r} \cdot d\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \right)$$

$$= \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \Bigg[\oint_\gamma \oint_\gamma \underbrace{d\vec{r}\,' \left(\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} d\vec{r} \right)}_{=0 \text{ } \oint \text{ über gradient}} \underbrace{- \oint_\gamma \oint_\gamma \frac{\vec{r}}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} d\vec{r}\, d\vec{r}\,' + \oint_\gamma \oint_\gamma \overbrace{\frac{\vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} d\vec{r}\, d\vec{r}\,'}^{= \frac{\vec{r}}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} d\vec{r}\, d\vec{r}\,'}}_{=0} \Bigg]$$

$$= 0 \quad ✓$$

/2

a) Die Leiterschleife wird in die 3 folgenden Teile geteilt:

1. $\vec{B}$ des Stroms der in negative x-Richtung

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} L \\ -R \\ 0 \end{pmatrix} - t\,\vec{e}_x \qquad t \in [0, L]$$

$$_1\vec{B} = {}_1\vec{B}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^L \frac{-\vec{e}_x \times (-\gamma_1(t))}{|-\gamma_1(t)|^3}\, dt$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^L \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -R \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{(L-t)^2 + R^2}^{\,3}}\, dt \qquad | \text{ Subst } L - t = R\,u$$

$$_1B_z = -\frac{\mu_0 I R}{4\pi} \int_{u(0)}^{u(L)} \frac{-R}{\sqrt{R^2(u^2+1)}^{\,3}}\, du \qquad | \; u = \tan s$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int_{s(u(0))}^{s(u(L))} \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 s}^{\,3}} \frac{1}{\cos^2 s}\, ds$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int_{s(u(0))}^{s(u(L))} \cos s\, ds$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \left(0 - \frac{\frac{L}{R}}{\sqrt{1 + \frac{L^2}{R^2}}} \right)$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \frac{-1}{\sqrt{\frac{R^2}{L^2} + 1}} \xrightarrow{L \to \infty} -\frac{\mu_0 I}{4\pi R}$$

$$= \frac{\ldots}{4\pi R} \, \frac{\ldots}{\sqrt{\frac{R^2}{L^2}+1}} \longrightarrow -\frac{\ldots}{4\pi R}$$

$$B_1 = -\frac{\mu_0 I}{4\pi R} \vec{e}_z$$

2. Der Anteil in positive x-Richtung muss den selben Beitrag wie 1.

$$\vec{B}_2 = -\frac{\mu_0 I}{4\pi R} \vec{e}_z$$

3. Der Halbkreis:

$$\gamma = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} R \qquad \varphi \in [-\pi, 0]$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_\gamma \frac{R\begin{pmatrix} 0 \\ \sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} \times R \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}}{\sqrt{(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) R^2}^3} \, d\varphi$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) \vec{e}_x \, d\varphi$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi R} (\varphi_2 - \varphi_1) \vec{e}_x$$

$$= -\frac{\mu_0 I}{4R} \vec{e}_x$$

$$\vec{B}_{ges} = \frac{\mu_0 I}{4R} \left(-\vec{e}_x - \frac{2}{\pi} \vec{e}_z\right)$$

$$= -\begin{pmatrix} 2{,}513 \cdot 10^{-5} \\ 0 \\ 1{,}600 \cdot 10^{-5} \end{pmatrix} T$$

b)

1. in negative x Richtung: $\vec{B}_1 = -\frac{\mu_0 I}{4R\pi} \vec{e}_z$
2. in " z " : $B_2 = -\frac{\mu_0 I}{4R\pi} \vec{e}_x$
3. Halbkreis: $B_3 = -\frac{\mu_0 I}{4R} \vec{e}_x$

$$B_{ges} = -\begin{pmatrix} 3{,}313 \cdot 10^{-5} \\ 0 \\ 0{,}8 \cdot 10^{-5} \end{pmatrix} T$$

c)

1. in negative x Richtung: $\vec{B}_1 = -\frac{\mu_0 I}{4R\pi} \vec{e}_z$
2. " positive x " : $B_2 = -\frac{\mu_0 I}{4R\pi} \vec{e}_y$

Im Kreis teilt sich der Strom über den zwei Wegen auf

$$\frac{1}{R_{ges}} = \frac{1}{R_0} + \frac{1}{3R_0} \qquad U = I_0 R_0 = I R_{ges}$$

$$\frac{R_0}{R_{ges}} = \frac{4}{3} = \frac{I}{I_0}$$

$$I_0 = \frac{3}{4} I$$

3. $\frac{3}{4}$ Kreis: $\vec{B} = \frac{\mu_0 \frac{3}{4} I}{4\pi R} \left(\frac{\pi}{2} - (-\pi)\right) \cdot (-\vec{e}_x) = -\frac{\mu_0 I}{4R} \cdot \frac{3}{8} \vec{e}_x$
4. $\frac{1}{4}$ Kreis: $\vec{B} = \frac{\mu_0 \frac{3}{4} I}{4\pi R} \left(\frac{\pi}{2} - \pi\right) \cdot (-\vec{e}_x) = \frac{\mu_0 I}{4R} \cdot \frac{3}{8} \vec{e}_x$

$$\vec{B}_{ges} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 8\cdot 10^{-6} \\ 8\cdot 10^{-6} \end{pmatrix} T$$

/3

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} d^3r \, [\vec{r}\times\vec{j}(\vec{r})]$$

$\vec{N} = \vec{r}\times\vec{F}$ Lorentzkraft

$$= \int d^3r \;\; \vec{r}\times\vec{F}(\vec{r})$$

$$= \int d^3r \, (\vec{r}\times(\vec{j}(\vec{r})\times\vec{B})) \qquad | \text{ Bac-Cab Identität}$$

$$= \int d^3r \left[(\vec{r}\vec{B})\,\vec{j} - (\vec{r}\,\vec{j})\,\vec{B}\right] \qquad | \; \vec{\nabla}\vec{j} = 0 \Rightarrow \int d^3r\,(\vec{r}\vec{j}) = 0$$

$$= \int d^3r \, (\vec{r}\vec{B})\,\vec{j}$$

$$= \int d^3r \;\; \vec{e}_i \; j_i \;\; r_k \, B_k$$

$$= B_k \int d^3r \;\; r_k \, \vec{e}_i \, j_i \qquad | \; \vec{\nabla}\vec{j} = 0 \Rightarrow \int d^3r \, (r_k j_i + r_i j_k) = 0$$

$$= B_k \vec{e}_i \int dr^3 \;\; r_k j_i \underbrace{- \tfrac{1}{2}(r_k j_i + r_i j_k)}_{=0}$$

$$= B_k \vec{e}_i \, \frac{1}{2} \int d^3 \;\; r_k j_i - r_i j_k$$

$$= B_k \vec{e}_i \, \frac{1}{2} \int d^3 \;\; (\vec{r}\times\vec{j})_l \qquad | \text{ mit } l \text{ sodass } \varepsilon_{lki} = 1$$

$$= B_k \vec{e}_i \, \frac{1}{2} \int dr^3 \;\; (\vec{r}\times\vec{j})_l \;\; \varepsilon_{lki}$$

$$= \frac{1}{2} \;\; (\vec{r}\times\vec{j}) \times \vec{B}$$

$$= \vec{m}\times\vec{B}$$