

Klassische Theoretische Physik III WS 2020/2021

Prof. Dr. M. Garst
Dr. B. NarozhnyBlatt 8
Lösungen

1. 2D Leiterschleifen:

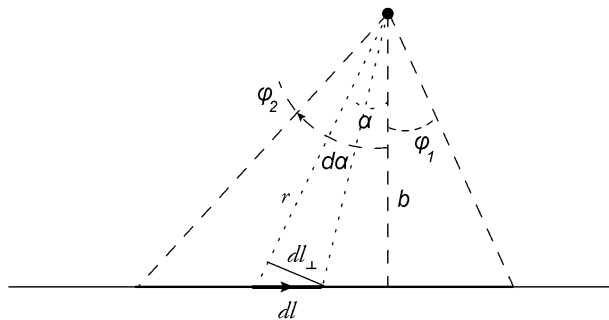
(a) *Ein dünner Leiter, in dem der Strom I fließt, bildet ein gleichseitiges Dreieck [Seitenlänge a , Mittelpunkt $(0,0,0)$] in der xy -Ebene.*

(a1) *Berechnen Sie das magnetische Feld B entlang der z -Achse.*

Um das Magnetfeld zu berechnen, verwenden wir das Biot-Savart Gesetz

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\mathbf{l}' \times \mathbf{r}}{r^3}.$$

Wir betrachten zuerst das Magnetfeld eines dünnen Leiters (siehe Skizze).



Die Größe $d\mathbf{l}' \times \mathbf{r}$ zeigt senkrecht aus der Bildebene und wir finden

$$d\mathbf{l}' \times \mathbf{r} = d\mathbf{l}'_{\perp} \times \mathbf{r} = r^2 d\alpha \mathbf{e}_z.$$

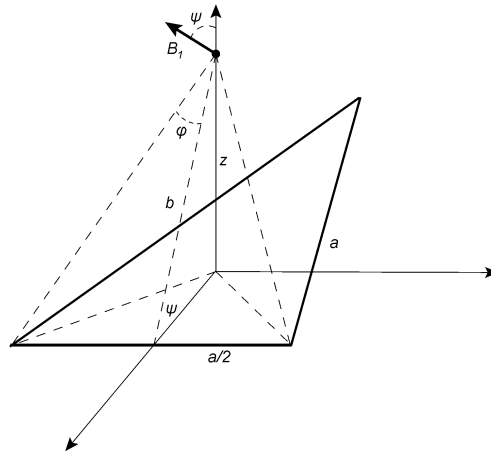
Führen wir die Distanz $b = r \cos \alpha$ ein (siehe Skizze). Dann

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi b} \cos \alpha d\alpha.$$

Für einen unendlichen Draht integrieren wir im Intervall $(-\pi/2, \pi/2)$. Für eine Kante (z.B. eines Dreiecks) integrieren wir in einem kleineren Intervall

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi b} \int_{-\varphi_1}^{\varphi_2} \cos \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi b} (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1).$$

Betrachten wir jetzt das Feld des Dreiecks im Punkt $(0, 0, z)$, siehe Abbildung.



Auf Symmetriegründen ist das Feld entlang z -Achse gerichtet. Deswegen berechnen wir das Feld jeder Kante und dann summieren die z -Komponenten. Alle drei Beiträge sind gleich. Sehen Sie die Abbildung für die Geometrie der Aufgabe. Die Integrationsgrenzen sind symmetrisch $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$. Dann finden wir für die z -Komponente des Feldes einer Kante

$$B_{1z} = \frac{\mu_0 I}{2\pi b} \sin \varphi \cos \psi.$$

Hier

$$\sin \varphi = \frac{a}{2\sqrt{a^2/4 + b^2}}, \quad \cos \psi = \frac{a}{2b\sqrt{3}}, \quad b = \sqrt{z^2 + a^2/12}.$$

Letztendlich finden wir das Feld des Dreiecks

$$B_z = 3B_{1z} = \frac{\mu_0 \sqrt{3}}{8\pi} \frac{Ia^2}{(z^2 + a^2/12)\sqrt{z^2 + a^2/3}}.$$

(a2) Berechnen Sie das magnetische Dipolmoment der Leiterschleife.

Das magnetische Dipolmoment ist proportional zur umschlossenen Fläche des Leiters. Somit ergibt sich

$$\mathbf{m} = \frac{\sqrt{3}}{4} Ia^2 \mathbf{e}_z.$$

(a3) Berechnen Sie das magnetische Dipolfeld auf der z -Achse und vergleichen Sie mit dem exakten Ergebnis aus (a1).

Das magnetische Dipolfeld ist durch

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\mathbf{n}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{m}}{r^3}$$

gegeben. Hier $\mathbf{n} = \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$.

Da das magnetische Dipolmoment entlang der z -Achse gerichtet ist, finden wir

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2m_z}{z^3} = \frac{\mu_0 \sqrt{3}}{8\pi} \frac{Ia^2}{z^3}.$$

Im Fernfeld (für $z \gg a$) geht das exakte Magnetfeld in das Dipolfeld über.

- (b) *Das Dipolmoment kann durch die vom Leiter umschlossene Fläche ausgedrückt werden. Gilt dies für nicht kreisförmige Leiterschleifen?*

Ja. Das Dipolmoment ist für flache Leiterschleifen immer proportional zur umschlossenen Fläche der Leiterschleife.

- (c) *Ein dünner Leiter bildet ein gleichseitiges Sechseck mit der Kantenlänge a [Mittelpunkt $(0,0,0)$], das in der xy -Ebene liegt. Berechnen Sie das magnetische Feld B entlang der z -Achse, wenn in dem Leiter der Strom I fließt.*

Die Aufgabe ist so ähnlich wie (a2). Der einzige Unterschied ist dass die Distanz b und der Winkel ψ anders definiert wurden

$$b = \sqrt{z^2 + 3a^2/4}, \quad \cos \psi = \frac{a\sqrt{3}}{2b}.$$

Deswegen, finden wir

$$B_z = 6B_{1z} = \frac{3\mu_0\sqrt{3}}{4\pi} \frac{Ia^2}{(z^2 + 3a^2/4)\sqrt{z^2 + a^2}}.$$

- (d) *Gegeben sei eine geschlossene, von einem konstanten Strom I durchflossene Leiterschleife. Berechnen Sie explizit die Gesamtkraft $\mathbf{F}$ die das von der Leiterschleife erzeugte Magnetfeld $\mathbf{B}$ auf die Leiterschleife selbst ausübt.*

Wir benutzen das Biot-Savart-Gesetz, um das B -Feld der Leiterschleife zu bestimmen

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}') \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}.$$

Ausgehend von der Definition des Kraftelements

$$d\mathbf{f} = d\mathbf{j}(\mathbf{x}) \times \mathbf{B}(\mathbf{x}),$$

sowie des B -Feldes nach Biot-Savart, erhalten wir die gesamte Kraft, die die Stromverteilung $\mathbf{j}$ auf die Leiterschleife selbst ausübt durch Integration über die gesamte Schleife:

$$\mathbf{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV \int dV' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}) \times (\mathbf{j}(\mathbf{x}') \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}'))}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}$$

Da die Stromdichte $\mathbf{j}$ nur auf der Leiterschleife C ungleich null ist und dort überall konstant, können wir das Volumenintegral jeweils durch ein geschlossenes Linienintegral über die Leiterschleife ersetzen

$$\int dV \mathbf{j}(\mathbf{x}) \rightarrow I \oint_C d\mathbf{l}$$

wir erhalten dann

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \frac{I^2 \mu_0}{4\pi} \oint_C \oint_C \frac{d\mathbf{l} \times (d\mathbf{l}' \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}'))}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \\ &= \frac{I^2 \mu_0}{4\pi} \oint_C \oint_C \left[\underbrace{\frac{(d\mathbf{l} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')) d\mathbf{l}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}}_{(1)} - \underbrace{\frac{(d\mathbf{l} \cdot d\mathbf{l}') (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}}_{(2)} \right].\end{aligned}$$

Es wurde die Vektoridentität $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c}$ benutzt.

Wir betrachten die beiden Teile des Integrals getrennt.

Der zweite Term ist antisymmetrisch unter Umbenennung der Integrationsvariablen $\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}'$. Er ist damit gleich seinem eigenen negativen, und damit null.

$$\begin{aligned}\oint \oint (d\mathbf{l} \cdot d\mathbf{l}') \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} &\stackrel{\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}'}{=} \oint \oint (d\mathbf{l}' \cdot d\mathbf{l}) \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \\ &= - \oint \oint (d\mathbf{l} \cdot d\mathbf{l}') \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} = 0.\end{aligned}$$

Der erste Term ist

$$\oint d\mathbf{l}' \oint d\mathbf{l} \cdot \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} = - \oint d\mathbf{l}' \oint d\mathbf{l} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = 0$$

da die Integration des Gradienten einer beliebigen skalaren Funktion über eine geschlossene Kurve immer null ergibt (Stokes'scher Satz, konservative Felder).

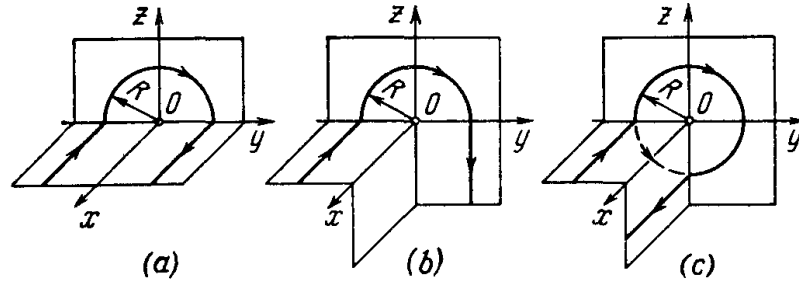
Wenn die Ersetzung des Volumenintegrals durch das Kurvenintegral nicht vorgenommen wurde, haben wir das folgende Integral:

$$\int dV \int dV' \mathbf{j}(\mathbf{x}') \mathbf{j}(\mathbf{x}) \cdot \nabla \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

Hier kann die Vektoridentität $\nabla \cdot (\phi \mathbf{a}) = \mathbf{a} \cdot \nabla \phi + \phi \nabla \cdot \mathbf{a}$ für beliebige Vektorfelder $\mathbf{a}$ und Skalarfelder ϕ sowie die Quellenfreiheit von $\mathbf{j}$, $\int dV \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ verwendet werden, um das Ergebnis zu zeigen.

2. 3D Leiterschleifen::

Betrachten Sie einen dünnen Leiter, der die folgenden 3 Formen bildet (siehe Abbildung).



Im Leiter fließt der Strom $I = 8 \text{ A}$. Der Radius des gerundeten Anteils ist $R = 100 \text{ mm}$. Der lineare Anteil des Leiters ist sehr Lang.

Finden Sie das Magnetfeld $\mathbf{B}$ im Punkt O für die drei Fälle.

Benutzen wir die Aufgabe (a2).

(a)

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_3 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} (-\mathbf{e}_z - \pi \mathbf{e}_x - \mathbf{e}_z) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi R} (\pi \mathbf{e}_x + 2\mathbf{e}_z).$$

$$|\mathbf{B}| = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \sqrt{\pi^2 + 4} = 0.3 \mu\text{T}.$$

(b)

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_3 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} (-\mathbf{e}_z - \pi \mathbf{e}_x - \mathbf{e}_x) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi R} [(\pi + 1)\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_z].$$

$$|\mathbf{B}| = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \sqrt{(\pi + 1)^2 + 1} = 0.34 \mu\text{T}.$$

(c) Hier sollen wir erst die Ströme finden:

$$I_1 + I_2 = I, \quad \frac{I_1}{I_2} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad I_1 = \frac{I}{4}, \quad I_2 = \frac{3I}{4}.$$

Dann

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi R} \left[-I\mathbf{e}_z - I\mathbf{e}_y - I_1 \frac{3\pi}{2} \mathbf{e}_x + I_2 \frac{\pi}{2} \mathbf{e}_x \right] = -\frac{\mu_0 I}{4\pi R} (\mathbf{e}_z + \mathbf{e}_y).$$

$$|\mathbf{B}| = \frac{\mu_0 I \sqrt{2}}{4\pi R} = 0.11 \mu\text{T}.$$

3. Drehmoment auf Stromverteilung:

Betrachten Sie eine konstante Stromverteilung $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ in einem homogenen konstanten externen magnetischen Feld $\mathbf{B}$. Zeigen Sie, dass für das Drehmoment $\mathbf{N}$ auf die Stromverteilung gilt

$$\mathbf{N} = \mathbf{m} \times \mathbf{B},$$

wobei $\mathbf{m}$ das magnetische Moment der Stromverteilung ist.

Das magnetische Moment $\mathbf{m}$ der Stromverteilung ist durch

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \int dV \mathbf{x} \times \mathbf{j}(\mathbf{x}).$$

gegeben. In dieser Lösung benutzen wir das Gauß'schen Einheitssystem.

Wir gehen dabei von der allgemeinen Definition des Drehmoments aus

$$d\mathbf{N} = \mathbf{x} \times d\mathbf{F}.$$

Einsetzen des Kraftelements $d\mathbf{F}$ und Integration liefert

$$\mathbf{N} = \frac{1}{c} \int dV \mathbf{x} \times \mathbf{j}(\mathbf{x}) \times \mathbf{B}.$$

Zur Darstellung der Kreuzprodukte kann der total antisymmetrische Levi-Civita-Tensor ϵ_{ijk} verwendet werden. Es gilt:

$$c_i = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} a_j b_k.$$

Weiterhin gilt

$$\sum_{i=1}^3 \epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}.$$

Wir benutzen, dass für die Komponenten der quellfreien Stromdichte $\mathbf{j}$ gilt

$$\int dV (x_i j_j + j_i x_j) = 0. \quad (1)$$

Es folgt (Achtung - Einsteinsche Summationskonvention!):

$$\begin{aligned} N_i &= \frac{1}{c} \int dV \epsilon_{ijk} x_j \epsilon_{klm} j_l B_m = \frac{1}{c} \int dV \epsilon_{kij} \epsilon_{klm} x_j j_l B_m \\ &= \frac{1}{c} \int dV (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) x_j j_l B_m = \frac{1}{c} \int dV (x_m j_i B_m - x_l j_l B_i) \\ &= \frac{1}{c} \int dV x_m j_i B_m. \end{aligned}$$

Dabei wurde die Eigenschaft des Levi-Civita-Tensors benutzt, sowie die Eigenschaft, dass der Levi-Civita-Tensor unter zyklischer Vertauschung der Indizes unverändert bleibt;

$$\epsilon_{ijk} = \epsilon_{jki} = \epsilon_{kij} = -\epsilon_{ikj} = \dots;$$

in der letzten Zeile wurde ausserdem die Integralidentität (1) ausgenutzt:

$$\int dV x_i j_i = - \int dV j_i x_i \Rightarrow \int dV x_i j_i = 0.$$

Es soll gezeigt werden, dass obige Gleichung identisch ist zu $\mathbf{N} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$. Wir schreiben dies ebenfalls in Komponenten:

$$\begin{aligned} N_i &= \frac{1}{2c} \int dV \varepsilon_{ijl} (\mathbf{x} \times \mathbf{j})_j B_l = \frac{1}{2c} \int dV \varepsilon_{ijl} \varepsilon_{jkm} x_k j_m B_l \\ &= \frac{1}{2c} \int dV (\delta_{lk} \delta_{im} - \delta_{lm} \delta_{ik}) x_k j_m B_l = \frac{1}{2c} \int dV (x_l j_i B_l - x_i j_l B_l) \\ &= \frac{1}{c} \int dV x_l j_i B_l. \end{aligned}$$

In der letzten Zeile wurde wieder die Integralidentität (1) verwendet:

$$\int dV x_i j_j = - \int dV x_j j_i \Rightarrow \int dV (x_i j_j - x_j j_i) = 2 \int dV x_i j_j$$