Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theoretische Festkörperphysik

Klassische Theoretische Physik III WS 2020/2021

Prof. Dr. M. Garst

Dr. B. Narozhny

Blatt 10

Abgabe 22.01.2021, Besprechung 26-27.01.2021

---

1. Polarisation: (40 Punkte)

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die elektromagnetischen Wellen transversal zur Ausbreitungsrichtung sind. Im freien Raum stehen die Vektoren des elektrischen und des magnetischen Feldes senkrecht aufeinander und auf der Ausbreitungsrichtung. Die komplexe Lösung für das Vektorpotential einer (in x-Richtung ausbreitenden) ebenen Welle sei

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_0 e^{i(k_x x - \omega t)}.$$

Zeigen Sie, dass der komplexe Vektor $\boldsymbol{A}_0$ für die Coulomb-Eichung ($\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} = 0$) innerhalb der yz-Ebene liegt.

Betrachten Sie nun zwei solche Wellen mit den Amplituden

$$\boldsymbol{A}_{01} = (0, A_1, 0), \qquad \boldsymbol{A}_{02} = \left(0, 0, A_2 e^{i\delta}\right),$$

wobei A_1, A_2 reell sind und δ die Phasendifferenz ist.

Finden Sie das gesamte, physikalische (d.h. reelle) elektrische Feld $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2$ wenn

(a) die Phasendifferenz gegeben ist durch $\delta = 0$ oder $\delta = \pi$ (lineare Polarisation);

(b) die Phasendifferenz $\delta = \pi/2$ ist und $A_1 = A_2$ (zirkulare Polarisation).

(c) Zeigen Sie, dass die Superposition der zwei zirkular polarisierten Wellen

$$\boldsymbol{E}_1 = E_0 \left[\cos\left(kx - \omega t + \phi_0\right) \boldsymbol{e}_x + \sin\left(kx - \omega t + \phi_0\right) \boldsymbol{e}_y\right],$$

$$\boldsymbol{E}_2 = E_0 \left[\cos\left(kx - \omega t\right) \boldsymbol{e}_x - \sin\left(kx - \omega t\right) \boldsymbol{e}_y\right],$$

linear polarisiert ist.

Hinweis

Benutzen Sie

$$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}, \qquad \sin a - \sin b = 2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}.$$

(d) Betrachten Sie die Superposition einer zirkular polarisierten Welle und einer linear polarisierten Welle. Welches Gebilde beschreibt das elektrische Feld?

2. Kugelwelle: (20 Punkte)

Das elektrische Feld einer Kugelwelle sei gegeben durch:

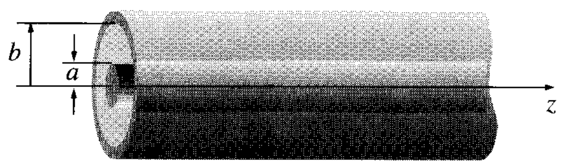
$$\boldsymbol{E}(r,\vartheta,\varphi,t) = A\frac{\sin\vartheta}{r}\left[\cos(kr-\omega t) - \frac{1}{kr}\sin(kr-\omega t)\right]\hat{e}_\varphi\,, \qquad \text{mit } \frac{\omega}{k} = c\,.$$

(a) Finden Sie $\boldsymbol{B}(r,\vartheta,\varphi,t)$, so dass die Maxwell-Gleichungen im Vakuum erfüllt sind.

(b) Berechnen Sie den Poynting-Vektor $\boldsymbol{S}$ und daraus den Intensitätsvektor $\boldsymbol{I} = \langle\boldsymbol{S}\rangle$, indem Sie über eine Periode mitteln.

3. Koaxiale Übertragungsleitungen: (40 Punkte)

Es ist bekannt, dass ein Hohlraum-Wellenleiter keine TEM-Wellen tragen kann (in der Vorlesung wurde es für einen rechteckigen Hohlraum-Wellenleiter gezeigt). Eine koaxiale Übertragungsleitung (Koaxialkabel) kann jedoch Moden mit $E_z = 0$ und $B_z = 0$ tragen (z sei die Ausbreitungsrichtung). Das Koaxialkabel besteht aus einem langen geraden leitenden Draht mit Radius a, der von einer zylindrischen leitenden Hülle mit Radius b umgeben ist (siehe Abbildung).



In dieser Aufgabe betrachten wir ausschließlich die TEM-Wellen in einem unendlich in z-Richtung ausgedehnten Koaxialkabel. Benutzen Sie den Ansatz $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0(x,y)e^{i(kz-\omega t)}$, $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_0(x,y)e^{i(kz-\omega t)}$ mit $E_{0z} = 0$ und $B_{0z} = 0$.

(a) Zeigen Sie, dass die Maxwell'schen Gleichungen in diesem Fall zur folgenden Relation führen:

$$k = \omega/c.$$

(b) Finden Sie die Relation zwischen den Komponenten von $\boldsymbol{E}_0$ und $\boldsymbol{B}_0$. Zeigen Sie, dass die Maxwell'schen Gleichungen äquivalent den Elektrostatik- und Magnetostatik-Gleichungen im leeren Raum für $\boldsymbol{E}_0$ und $\boldsymbol{B}_0$ sind.

(c) Benutzen Sie die Maxwell'schen Gleichungen (sowie die Randbedingungen für ideale Leiter), um $\boldsymbol{E}_0$ und $\boldsymbol{B}_0$ zu finden.

Hinweis: Führen Sie Zylinderkoordinaten ein.

(d) Bestimmen Sie die (zeitabhängige eindimensionale) Ladungsdichte $\rho(z,t)$ sowie den Strom $I(z,t)$ im inneren Leiter des Koaxialkabels.