

Klassische Theoretische Physik III WS 2020/2021**Prof. Dr. M. Garst**
Dr. B. Narozhny**Blatt 10**
Lösungen**1. Polarisation:***Betrachten wir zwei monochromatische Wellen mit den Amplituden*

$$\mathbf{A}_{01} = (0, A_1, 0), \quad \mathbf{A}_{02} = (0, 0, A_2 e^{i\delta}),$$

wobei A_1, A_2 reell sind und δ die Phasendifferenz ist.

Für die elektromagnetischen Wellen wählen wir die folgende Eichung:

$$\varphi = 0, \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.$$

Das elektrische Feld erster Welle ist

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{c} \operatorname{Re} \{ i\omega A_1 e^{i(k_x x - \omega t)} \} \mathbf{e}_y = -\frac{\omega}{c} A_1 \mathbf{e}_y \sin(k_x x - \omega t).$$

Für die zweite Welle erhalten wir

$$\mathbf{E}_2 = \frac{1}{c} \operatorname{Re} \{ i\omega A_2 e^{i(k_x x - \omega t + \delta)} \} \mathbf{e}_z = -\frac{\omega}{c} A_2 \mathbf{e}_z \sin(k_x x - \omega t + \delta).$$

*Finden Sie das gesamte, physikalische (d.h. reelle) elektrische Feld $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$ wenn**(a) die Phasendifferenz ist gegeben durch $\delta = 0$ oder $\delta = \pi$ (lineare Polarisation);*Wenn $\delta = 0$, dann

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = -\frac{\omega}{c} \sin(k_x x - \omega t) [A_1 \mathbf{e}_y + A_2 \mathbf{e}_z].$$

Wenn $\delta = \pi$, dann

$$\mathbf{E} = -\frac{\omega}{c} \sin(k_x x - \omega t) [A_1 \mathbf{e}_y - A_2 \mathbf{e}_z].$$

In beide Fälle ist die Richtung der Schwingung des elektrischen Feldes konstant.

*(b) die Phasendifferenz ist $\delta = \pi/2$ und $A_1 = A_2$ (zirkulare Polarisation).*Wenn $\delta = \pi/2$ und $A_1 = A_2$, bezeichne $E_0 = \omega A_1/c$, und

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -E_0 [\sin(k_x x - \omega t) \mathbf{e}_y + \cos(k_x x - \omega t) \mathbf{e}_z] \\ &= E_0 [\sin(k_x x - \omega t + \pi) \mathbf{e}_y + \cos(k_x x - \omega t + \pi) \mathbf{e}_z]. \end{aligned}$$

Der Betrag $|\mathbf{E}|$ ist konstant, aber die Richtung der Schwingung des elektrischen Feldes ändert sich innerhalb der senkrecht zum Wellenvektor stehenden Ebene mit konstanter Winkelgeschwindigkeit. Damit beschreibt der Vektor $\mathbf{E}$ einen Kreis.

(c) Zeigen Sie, dass die Superposition der zwei zirkular polarisierten Wellen

$$\mathbf{E}_1 = E_0 [\cos(kx - \omega t + \phi_0) \mathbf{e}_z + \sin(kx - \omega t + \phi_0) \mathbf{e}_y],$$

$$\mathbf{E}_2 = E_0 [\cos(kx - \omega t) \mathbf{e}_z - \sin(kx - \omega t) \mathbf{e}_y],$$

linear polarisiert ist.

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2.$$

Betrachten wir erst die z -Komponente:

$$E_0 \cos(kx - \omega t + \phi_0) \mathbf{e}_z + E_0 \cos(kx - \omega t) \mathbf{e}_z = 2E_0 \cos \frac{\phi_0}{2} \cos \left(kx - \omega t + \frac{\phi_0}{2} \right) \mathbf{e}_z.$$

Die y -Komponente ist

$$E_0 \sin(kx - \omega t + \phi_0) \mathbf{e}_y - E_0 \sin(kx - \omega t) \mathbf{e}_y = 2E_0 \sin \frac{\phi_0}{2} \cos \left(kx - \omega t + \frac{\phi_0}{2} \right) \mathbf{e}_y.$$

Deswegen finden wir für das Gesamtfeld

$$\mathbf{E} = 2E_0 \left[\cos \frac{\phi_0}{2} \mathbf{e}_z + \sin \frac{\phi_0}{2} \mathbf{e}_y \right] \cos \left(kx - \omega t + \frac{\phi_0}{2} \right).$$

Die Richtung der Schwingung des elektrischen Feldes ist konstant und ist gegeben durch

$$\mathbf{n} = \cos \frac{\phi_0}{2} \mathbf{e}_z + \sin \frac{\phi_0}{2} \mathbf{e}_y.$$

(d) Betrachten Sie die Superposition einer zirkular polarisierten Welle und einer linear polarisierten Welle. Welche Gebilde beschreibt das elektrische Feld?

Betrachten wir die Superposition einer linear polarisierten Welle

$$\mathbf{E}_1 = E_{01} \mathbf{e}_y \sin(kx - \omega t),$$

und einer zirkular polarisierten Welle

$$\mathbf{E}_2 = E_{02} [\sin(kx - \omega t) \mathbf{e}_y + \cos(kx - \omega t) \mathbf{e}_z].$$

Für die y -Komponente erhalten wir

$$E_{01} \sin(kx - \omega t) + E_{02} \sin(kx - \omega t) = [E_{01} + E_{02}] \sin(kx - \omega t).$$

Deswegen ist das Gesamtfeld

$$\mathbf{E} = E_y \mathbf{e}_y \sin(kx - \omega t) + E_z \mathbf{e}_z \cos(kx - \omega t),$$

wobei

$$E_y = E_{01} + E_{02}, \quad E_z = E_{02}.$$

Der Vektor $\mathbf{E}$ beschreibt eine Ellipse.

2. Kugelwelle:

Das elektrische Feld einer Kugelwelle sei gegeben durch:

$$\mathbf{E}(r, \vartheta, \varphi, t) = A \frac{\sin \vartheta}{r} \left[\cos(kr - \omega t) - \frac{1}{kr} \sin(kr - \omega t) \right] \hat{e}_\varphi, \quad \text{mit } \frac{\omega}{k} = c.$$

(a) Finden Sie $\mathbf{B}(r, \vartheta, \varphi, t)$, so dass die Maxwell-Gleichungen im Vakuum erfüllt sind.

Aus Maxwell-Gleichungen folgt:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -c \nabla \times \mathbf{E}.$$

Die Rotation des in Kugelkoordinaten gegebenen Vektorfeld $\mathbf{E}$ ist durch

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} (E_\varphi \sin \vartheta) - \frac{\partial E_\vartheta}{\partial \varphi} \right] \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r E_\varphi) \right] \mathbf{e}_\vartheta \\ &\quad + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r E_\vartheta) - \frac{\partial E_r}{\partial \vartheta} \right] \mathbf{e}_\varphi \end{aligned}$$

gegeben. Mit $\mathbf{E} \propto \mathbf{e}_\varphi$ (d.h. mit $E_r = E_\vartheta = 0$) erhalten wir

$$\nabla \times \mathbf{E} = \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} (E_\varphi \sin \vartheta) \right] \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \left[-\frac{\partial}{\partial r} (r E_\varphi) \right] \mathbf{e}_\vartheta.$$

Für das elektrische Feld in dieser Aufgabe finden wir

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= \frac{2A \cos \vartheta}{r^2} \left[\cos(kr - \omega t) - \frac{1}{kr} \sin(kr - \omega t) \right] \mathbf{e}_r \\ &\quad - \frac{A \sin \vartheta}{r} \left[-k \sin(kr - \omega t) + \frac{1}{kr^2} \sin(kr - \omega t) - \frac{1}{r} \cos(kr - \omega t) \right] \mathbf{e}_\vartheta. \end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\mathbf{B}(r, \vartheta, \varphi, t) = \mathbf{B}^w(r, \vartheta, \varphi, t) + \mathbf{B}_0(r, \vartheta, \varphi),$$

wobei B_0 unabhängig von t ist und

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^w(r, \vartheta, \varphi, t) &= \frac{2cA \cos \vartheta}{\omega r^2} \left[\sin(kr - \omega t) + \frac{1}{kr} \cos(kr - \omega t) \right] \mathbf{e}_r \\ &\quad - \frac{cA \sin \vartheta}{\omega r} \left[k \cos(kr - \omega t) - \frac{1}{kr^2} \cos(kr - \omega t) - \frac{1}{r} \sin(kr - \omega t) \right] \mathbf{e}_\vartheta. \end{aligned}$$

Nun benutzen wir

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}.$$

Wir können jetzt explizit betätigen, dass

$$\nabla \times \mathbf{B}^w = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Es folgt

$$\nabla \times \mathbf{B}_0 = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}.$$

Für $j = 0$ setzen wir $\mathbf{B}_0 = 0$.

Deswegen bekommen wir das Ergebniss:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(r, \vartheta, \varphi, t) = \frac{A}{kr^2} \left\{ 2 \cos \vartheta \left[\sin(kr - \omega t) + \frac{1}{kr} \cos(kr - \omega t) \right] \mathbf{e}_r \right. \\ \left. - \sin \vartheta \left[kr \cos(kr - \omega t) - \frac{1}{kr} \cos(kr - \omega t) - \sin(kr - \omega t) \right] \mathbf{e}_\vartheta \right\}. \end{aligned}$$

- (b) Berechnen Sie den Poynting-Vektor $\mathbf{S}$ und daraus den Intensitätsvektor $\mathbf{I} = \langle \mathbf{S} \rangle$, indem Sie über eine Periode mitteln.

Der Poynting-Vektor ist gegeben durch

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{B}.$$

Mit der Hilfe der expliziten Ausdrücken für $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbf{S} = \frac{cA^2 \sin \vartheta}{4\pi kr^3} \left\{ \cos \vartheta \left[\sin 2(kr - \omega t) \left(1 - \frac{1}{k^2 r^2} \right) + \frac{2}{kr} \cos 2(kr - \omega t) \right] \mathbf{e}_\vartheta \right. \\ \left. + kr \sin \vartheta \left[\cos^2(kr - \omega t) - \frac{1}{2kr} \sin 2(kr - \omega t) \left(2 - \frac{1}{k^2 r^2} \right) - \frac{1}{k^2 r^2} \cos 2(kr - \omega t) \right] \mathbf{e}_r \right\}. \end{aligned}$$

Der Intensitätsvektor $\mathbf{I} = \langle \mathbf{S} \rangle$ ergibt sich:

$$\mathbf{I} = \frac{cA^2 \sin^2 \vartheta}{8\pi r^2} \mathbf{e}_r.$$

Hier haben wir die folgenden Identitäten benutzt:

$$\langle \sin 2(kr - \omega t) \rangle = 0, \quad \langle \sin^2(kr - \omega t) \rangle = \langle \cos^2(kr - \omega t) \rangle = 1/2.$$

3. Koaxiale Übertragungsleitungen:

- (a) Zeigen Sie, dass die Maxwell'schen Gleichungen in diesem Fall zur folgenden Relation führen:

$$k = \omega/c.$$

Maxwell'sche Gleichungen innerhalb des Koaxialkables:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0, & \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, & \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \end{aligned}$$

Wellen-Ansatz:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(x, y)e^{i(kz - \omega t)}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0(x, y)e^{i(kz - \omega t)}, \quad E_{0z} = B_{0z} = 0.$$

Damit finden wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{0y}}{\partial x} - \frac{\partial E_{0x}}{\partial y} &= 0, & \frac{\partial B_{0y}}{\partial x} - \frac{\partial B_{0x}}{\partial y} &= 0, \\ -kE_{0y} &= \omega B_{0x}, & kB_{0x} &= -\frac{\omega}{c^2}E_{0y}, \\ kE_{0x} &= \omega B_{0y}, & kB_{0y} &= \frac{\omega}{c^2}E_{0x}. \end{aligned}$$

Von der letzten vier Gleichungen erhalten wir

$$k = \frac{\omega}{c}.$$

- (b) Finden Sie die Relation zwischen den Komponenten von $\mathbf{E}_0$ und $\mathbf{B}_0$. Zeigen Sie, dass die Maxwell'schen Gleichungen äquivalent den Elektrostatik- und Magnetostatik-Gleichungen im leeren Raum für $\mathbf{E}_0$ und $\mathbf{B}_0$ sind.

Von der Maxwell'schen Gleichungen erhalten wir

$$E_{0x} = cB_{0y}, \quad E_{0y} = -cB_{0x} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} \perp \mathbf{B}.$$

Die Kontinuitätsgleichungen:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0.$$

Von der Kontinuitätsgleichungen und der Maxwell'schen Gleichungen erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{0y}}{\partial x} - \frac{\partial E_{0x}}{\partial y} &= 0, & \frac{\partial E_{0x}}{\partial x} + \frac{\partial E_{0y}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial B_{0y}}{\partial x} - \frac{\partial B_{0x}}{\partial y} &= 0, & \frac{\partial B_{0x}}{\partial x} + \frac{\partial B_{0y}}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

- (c) Benutzen Sie die Maxwell'schen Gleichungen (sowie die Randbedingungen für ideale Leiter), um $\mathbf{E}_0$ und $\mathbf{B}_0$ zu finden.

Die Lösung können wir von der Elektrostatik (sowie Magnetostatik) übernehmen. Das elektrische Feld einer unendlich ausgedehnten Linienladung ist (in Zylindrischen Koordinaten)

$$\mathbf{E}_0 = \frac{A}{r} \mathbf{e}_r.$$

Das magnetische Feld eines unendlichen geraden Stroms ist

$$\mathbf{B}_0 = \frac{A}{cr} \mathbf{e}_\varphi.$$

Wir können jetzt explizit bestätigen, dass die Maxwell'schen Gleichungen sowie die Randbedingungen für beliebigen Werten von A erfüllt sind.

- (d) *Bestimmen Sie die (zeitabhängige eindimensionale) Ladungsdichte $\rho(z, t)$ sowie den Strom $I(z, t)$ im inneren Leiter des Koaxialkabels.*

Benutzen wir das Gauß'schen Gesetz für einen Zylinder von Radius r und Länge dz :

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\epsilon_0} Q.$$

Die linke Seite:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = E_0 \frac{\cos(kz - \omega t)}{r} (2\pi r) dz$$

Die rechte Seite:

$$Q = \lambda dz.$$

Deswegen

$$\lambda = 2\pi\epsilon_0 E_0 \cos(kz - \omega t).$$

Jetzt benutzen wir das Amper'schen Gesetz für ein Kreis von Radius r :

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I.$$

Die linke Seite:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{E_0}{c} \frac{\cos(kz - \omega t)}{r} (2\pi r).$$

Deswegen

$$I = \frac{2\pi E_0}{\mu_0 c} \cos(kz - \omega t).$$