

Klassische Theoretische Physik III WS 2020/2021

Prof. Dr. M. Garst
Dr. B. NarozhnyBlatt 11
Lösungen

1. Magnetische Dipol- und elektrische Quadrupolstrahlung:

(a) Zeigen Sie, dass die folgende Relation gilt

$$\mathbf{g}^{(1)} = -c\mathbf{n} \times \mathbf{m}_0 - \frac{i\omega}{6} \sum_{lp} n_l Q_{0,lp} \mathbf{e}_p - \frac{i\omega}{6} \mathbf{n} \int d^3r' (r')^2 \rho_0(\mathbf{r}') ,$$

wobei $\mathbf{m}_0$ die Amplitude des oszillierenden magnetischen Momentes, $Q_{0,lp}$ die Amplitude des elektrischen Quadrupolmomentes, und ρ_0 die Amplitude der Ladungsdichte sind.

$$\mathbf{g}^{(1)}(k\mathbf{n}) = \int d^3r' (\mathbf{n}r') \mathbf{j}_0(\mathbf{r}')$$

Betrachten wir jetzt die Komponente i :

$$g_i^{(1)} = n_j \int d^3r' r'_j j_{0,i} = n_j \int d^3r' \left[\frac{r'_j j_{0,i} - r'_i j_{0,j}}{2} + \frac{r'_j j_{0,i} + r'_i j_{0,j}}{2} \right] = g_i^{(M)} + g_i^{(E)}$$

Der erste Term beschreibt den magnetischen Dipol

$$g_i^{(M)} = n_j \int d^3r' \frac{r'_j j_{0,i} - r'_i j_{0,j}}{2} = -c [\mathbf{n} \times \mathbf{m}_0]_i, \quad \mathbf{m}_0 = \frac{1}{2c} \int d^3r \mathbf{r} \times \mathbf{j}_0.$$

Den zweiten Term umschreiben wir als

$$g_i^{(E)} = n_j \int d^3r' \frac{r'_j j_{0,i} + r'_i j_{0,j}}{2} = n_j \int d^3r' \frac{j_{0,k} \nabla_k (r'_i r'_j)}{2} = -n_j \int d^3r' \frac{r'_i r'_j}{2} \nabla_k j_{0,k}.$$

Jetzt benutzen wir die Kontinuitätsgleichung:

$$g_i^{(E)} = -n_j \int d^3r' \frac{r'_i r'_j}{2} i\omega \rho_0(r') = -\frac{i}{6} \omega n_j \left[Q_{0,ij} + \delta_{ij} \int d^3r' (r')^2 \rho_0(r') \right].$$

Hier

$$Q_{0,ij} = \int d^3r' \rho_0(r') \left[3r'_i r'_j - \delta_{ij} (r')^2 \right].$$

- (b) Zeigen Sie, dass der dritte Term in $\mathbf{g}^{(1)}$ kein elektrisches oder magnetisches Feld erzeugt.

Der Term liefert kein Beitrag zu $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ da

$$\nabla \times (\mathbf{n}F(r)) = 0.$$

Damit

$$\mathbf{B}_0^{(1)} = \nabla \times \mathbf{A}_0^{(1)} = \nabla \times \frac{e^{ikr}}{cr} (-ik) \mathbf{g}^{(1)} \simeq \frac{k^2 e^{ikr}}{cr} \mathbf{n} \times \mathbf{g}^{(1)} = 0,$$

und

$$\mathbf{E}_0^{(1)} = -\mathbf{n} \times \mathbf{B}_0^{(1)} = 0.$$

2. Sonnenlicht:

Die Intensität des Sonnenlichts, das auf die Erde trifft, beträgt etwa 1300 W/m^2 .

- (a) Wenn das Sonnenlicht auf einen perfekten Absorber trifft, welchen Druck übt es dann aus?

$$P_A = \frac{I}{c} = \frac{1.3 \times 10^3}{3 \times 10^8} = 4.3 \times 10^{-6} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}.$$

- (b) Wie sieht es mit einem perfekten Reflektor aus?

$$P_{PR} = 2P_A.$$

- (c) Welchen Anteil des atmosphärischen Drucks macht das aus?

Atmosphärischer Druck ist

$$P_0 = 1.03 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}.$$

Der Druck des Lichts auf einen Reflektor ist

$$p_{PR} = \frac{P_{PR}}{P_0} = \frac{8.6 \times 10^{-6}}{1.03 \times 10^5} = 8.3 \times 10^{-11} \text{ Atmosphären}$$

3. Teilchen und elektromagnetische Wellen:

Betrachten Sie ein Teilchen der Ladung q und der Masse m , das sich in der xy -Ebene als Reaktion auf eine sich in z -Richtung ausbreitende, linear polarisierte elektromagnetische Welle bewegt.

Wir wählen die x -Achse entlang der Richtung des elektrischen Feldes. In diesem Fall sind die Felder gegeben durch

$$\mathbf{E} = E_0 \cos(kz - \omega t) \mathbf{e}_x, \quad \mathbf{B} = \frac{1}{c} E_0 \cos(kz - \omega t) \mathbf{e}_y, \quad \omega = ck.$$

- (a) *Vernachlässigen Sie die magnetische Kraft und bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Teilchens als Funktion der Zeit. (Nehmen Sie an, dass die Durchschnittsgeschwindigkeit gleich Null ist.)*

Die elektrische Kraft beträgt

$$\mathbf{F}_e = q\mathbf{E} = qE_0 \cos(kz - \omega t) \mathbf{e}_x.$$

Durch Lösung der Newtonschen Gleichung erhalten wir

$$\mathbf{F}_e = m\mathbf{a} = m \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \Rightarrow \mathbf{v} = \frac{qE_0}{m} \mathbf{e}_x \int dt \cos(kz - \omega t) = -\frac{qE_0}{m\omega} \sin(kz - \omega t) \mathbf{e}_x + C.$$

Unter der Annahme der mittleren Geschwindigkeit Null finden wir die Integrationskonstante

$$\langle \mathbf{v} \rangle = 0 \Rightarrow C = 0.$$

- (b) *Berechnen Sie nun die resultierende Magnetkraft auf das Teilchen.*

Die magnetische Kraft, die auf ein Teilchen wirkt, das sich mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ bewegt, ist gegeben durch

$$\mathbf{F}_m = \frac{q}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} = -\frac{q^2 E_0^2}{m\omega c} \sin(kz - \omega t) \cos(kz - \omega t) \mathbf{e}_z = \frac{q^2 E_0^2}{2m\omega c} \sin 2(kz - \omega t) \mathbf{e}_z.$$

- (c) *Zeigen Sie, dass die (zeitlich) durchschnittliche Magnetkraft Null ist.*

Die Zeitmittelung entspricht der Integration über der Periodendauer

$$\langle \mathbf{F}_m \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T dt \mathbf{F}_m = 0.$$

Das Integral verschwindet aufgrund der Periodizität der Magnetkraft.

Das Problem bei diesem naiven Modell für den Lichtdruck ist, dass die Geschwindigkeit um 90° phasenverschoben zu den Feldern ist. Damit Energie absorbiert werden kann, muss es eine Dämpfung der Bewegung der Ladungen geben. Eine solche Dämpfung wird beschrieben durch eine Kraft $F_\gamma = -\gamma m \mathbf{v}$ mit der Dämpfungskonstante γ .

- (d) Wiederholen Sie die Aufgabe (a) (ignorieren Sie die exponentiell gedämpfte Transiente) unter Berücksichtigung der Dämpfung.

Wenn wir den Dämpfungsterm zur Newtonschen Gleichung hinzufügen, erhalten wir

$$q\mathbf{E} - \gamma m \mathbf{v} = m \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \gamma \mathbf{v} = \frac{qE_0}{m} \cos(kz - \omega t) \mathbf{e}_x.$$

Wir lösen diese Differentialgleichung mit Hilfe des Ansatzes

$$\mathbf{v} = A \cos(kz - \omega t + \theta) \mathbf{e}_x.$$

Wir setzen den Ansatz in die linke Seite der Gleichung ein. In der rechten Seite der Gleichung verwenden wir die trigonometrische Identität

$$\cos u = \cos \theta \cos(u + \theta) + \sin \theta \sin(u + \theta).$$

Dadurch ergibt sich die Gleichung in der Form

$$A\omega \sin(kz - \omega t + \theta) + \gamma A \cos(kz - \omega t + \theta) = \frac{qE_0}{m} [\cos \theta \cos(kz - \omega t + \theta) + \sin \theta \sin(kz - \omega t + \theta)].$$

Durch Gleichsetzen gleicher Terme erhalten wir

$$A\omega = \frac{qE_0}{m} \sin \theta, \quad A\gamma = \frac{qE_0}{m} \cos \theta.$$

Es folgt

$$\tan \theta = \frac{\omega}{\gamma}, \quad A = \frac{qE_0}{m\sqrt{\omega^2 + \gamma^2}}.$$

Letztendlich

$$\mathbf{v} = \frac{qE_0}{m\sqrt{\omega^2 + \gamma^2}} \cos(kz - \omega t + \theta), \quad \tan \theta = \frac{\omega}{\gamma}.$$

- (e) Wiederholen Sie die Aufgabe (b) unter Berücksichtigung der Dämpfung und finden Sie die durchschnittliche Magnetkraft die auf das Teilchen wirkt.

Setzt man die obige Geschwindigkeit in den Ausdruck der Magnetkraft ein, erhält man

$$\mathbf{F}_m = \frac{q}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \frac{q^2 E_0^2}{mc\sqrt{\omega^2 + \gamma^2}} \cos(kz - \omega t + \theta) \cos(kz - \omega t) \mathbf{e}_z.$$

Die Zeitmittelung entspricht der Integration über der Periodendauer

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{F}_m \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T dt \mathbf{F}_m = \\
 &= \frac{q^2 E_0^2}{mc \sqrt{\omega^2 + \gamma^2}} \mathbf{e}_z \frac{1}{T} \int_0^T dt \cos(kz - \omega t + \theta) \cos(kz - \omega t) \\
 &= \frac{q^2 E_0^2}{mc \sqrt{\omega^2 + \gamma^2}} \mathbf{e}_z \left[\cos \theta \frac{1}{T} \int_0^T dt \cos^2(kz - \omega t) - \sin \theta \frac{1}{T} \int_0^T dt \sin(kz - \omega t) \cos(kz - \omega t) \right] \\
 &= \frac{q^2 E_0^2 \cos \theta}{2mc \sqrt{\omega^2 + \gamma^2}} \mathbf{e}_z = \frac{\gamma q^2 E_0^2}{2mc(\omega^2 + \gamma^2)} \mathbf{e}_z.
 \end{aligned}$$

4. Maxwell-Spannungstensor:

Finden Sie alle Elemente des Maxwell-Spannungstensors für eine monochromatische ebene Welle, die sich in z -Richtung ausbreitet und in x -Richtung linear polarisiert ist. Ergibt Ihre Antwort einen Sinn? (Denken Sie daran, dass $-T_{ij}$ die Impulsstromdichte darstellt.) Wie hängt die Impulsstromdichte in diesem Fall mit der Energiedichte zusammen?

Wir wählen die x -Achse entlang der Richtung des elektrischen Feldes. In diesem Fall sind die Felder gegeben durch

$$\mathbf{E} = E_0 \cos(kz - \omega t) \mathbf{e}_x, \quad \mathbf{B} = \frac{1}{c} E_0 \cos(kz - \omega t) \mathbf{e}_y.$$

Der Spannungstensor ist

$$T_{ij} = \frac{1}{4\pi} \left[4\pi\epsilon_0 \left(E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \mathbf{E}^2 \right) + \frac{4\pi}{\mu_0} \left(B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \mathbf{B}^2 \right) \right].$$

Da sowohl $\mathbf{E}$ als auch $\mathbf{B}$ jeweils nur eine Komponente haben, sind die Nicht-Diagonalelemente gleich Null

$$T_{i \neq j} = 0.$$

Diagonalelemente:

$$\begin{aligned}
 T_{xx} &= \frac{1}{4\pi} \left[4\pi\epsilon_0 \left(E_x E_x - \frac{1}{2} \mathbf{E}^2 \right) - \frac{4\pi}{\mu_0} \left(\frac{1}{2} \mathbf{B}^2 \right) \right] = \frac{1}{4\pi} \left[4\pi\epsilon_0 \frac{1}{2} \mathbf{E}_0^2 - \frac{4\pi}{\mu_0 c^2} \frac{1}{2} \mathbf{E}_0^2 \right] = 0, \\
 T_{yy} &= \frac{1}{4\pi} \left[-4\pi\epsilon_0 \left(\frac{1}{2} \mathbf{E}^2 \right) + \frac{4\pi}{\mu_0} \left(B_y B_y - \frac{1}{2} \mathbf{B}^2 \right) \right] = \frac{1}{4\pi} \left[-4\pi\epsilon_0 \frac{1}{2} \mathbf{E}_0^2 + \frac{4\pi}{\mu_0 c^2} \frac{1}{2} \mathbf{E}_0^2 \right] = 0, \\
 T_{zz} &= \frac{1}{4\pi} \left[-4\pi\epsilon_0 \left(\frac{1}{2} \mathbf{E}^2 \right) - \frac{4\pi}{\mu_0} \left(\frac{1}{2} \mathbf{B}^2 \right) \right] = -\frac{1}{4\pi} \left[4\pi\epsilon_0 \frac{1}{2} \mathbf{E}_0^2 + \frac{4\pi}{\mu_0 c^2} \frac{1}{2} \mathbf{E}_0^2 \right] = -w_{em}.
 \end{aligned}$$

Der Impuls dieser Felder liegt in z -Richtung, und er wird in z -Richtung transportiert, also ja, es macht Sinn dass T_{zz} das einzige Nicht-Null-Element in T_{ij} sein sollte. Gemäß der Vorlesung ist $-\mathbf{T}d\mathbf{a}$ die Rate, mit der der Impuls eine Fläche $d\mathbf{a}$ durchquert. Hier haben wir keinen Impuls, der Flächen in x - oder y -Richtung; der Impuls pro Zeiteinheit pro Flächeneinheit, der über eine in z -Richtung orientierte Fläche fließt ist $-T_{zz} = w_{em} = \Pi_{em}c$, also $\Delta p = \Pi_{em}cA\Delta t$, und damit $\Delta p/\Delta t = \Pi_{em}cA$ – Impuls pro Zeiteinheit durch die Fläche A . Es ist offensichtlich, dass **die Impulsflussdichte = Energiedichte ist**.

