

Klassische Theoretische Physik III WS 2020/2021**Prof. Dr. M. Garst****Blatt 12****Dr. B. Narozhny****Abgabe 05.02.2021, Besprechung 09-10.02.2021**

1. Dipolstrahlung:

(a) *Zwei leitende Kugeln bilden einen elektrischen Dipol, der an einer idealen Stromquelle $I(t) = I_0 e^{-i\omega t}$ gekoppelt ist.*

1. *Berechnen Sie die gesamte abgestrahlte Leistung für den Fall $d \ll \lambda$, wobei λ die Wellenlänge der Strahlung ist.*

Die gesamte abgestrahlte Leistung ist

$$\langle P \rangle = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{12\pi c},$$

wobei der Maximalwert des Dipolmoments ist

$$p_0 = q_0 d = I_0 d / \omega.$$

Deswegen

$$\langle P \rangle = \frac{\mu_0 I_0^2 d^2 \omega^2}{12\pi c}.$$

2. *Zeigen Sie, dass der Strahlungswiderstand durch*

$$R_s = 790 \frac{d^2}{\lambda^2} [\Omega]$$

gegeben ist. ($[\Omega]$ bezeichnet hier die SI-Einheit des Widerstands - Ohm).

Die Wärmeleistung ist

$$P = I^2 R = I_0^2 R_s \cos^2 \omega t \quad \Rightarrow \quad \langle P \rangle = \frac{1}{2} I_0^2 R_s.$$

Deswegen finden wir

$$R_s = \frac{\mu_0 d^2 \omega^2}{6\pi c}.$$

Führen wir die Wellenlänge ein:

$$\omega = 2\pi c / \lambda \quad \Rightarrow \quad R_s = \frac{2\pi}{3} \mu_0 c \frac{d^2}{\lambda^2} \approx 789.6 \frac{d^2}{\lambda^2} [\Omega].$$

3. Berechnen Sie den Strahlungswiderstand für die Wellenlänge der Neue Welle Karlsruhe.

Die Frequenz der Neue Welle Karlsruhe ist

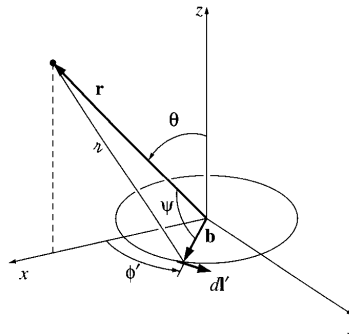
$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 101.8 \text{ MHz} \Rightarrow \lambda = 2.95 \text{ m}.$$

In einem üblichen Radio $d = 5 \text{ cm}$, deswegen

$$R_s = 0.23 \Omega.$$

- (b) Eine leitende kreisförmige Schleife, die senkrecht zur z -Achse ausgerichtet ist, ist an einer idealen Stromquelle $I(t) = I_0 e^{-i\omega t}$ gekoppelt. Der Radius der Schleife, b , ist viel kleiner als die Wellenlänge, $b \ll \lambda$.

1. Berechnen Sie $\frac{dP}{d\Omega}[\theta, \varphi]$, d.h., die abgestrahlte Leistung pro Raumwinkel.



Das magnetische Dipolmoment:

$$\mathbf{m}(t) = \pi b^2 I(t) \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z m_0 \cos \omega t, \quad m_0 \equiv \pi b^2 I_0.$$

Das retardierte Vektorpotential beträgt

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\mathbf{l}' \frac{I_0 \cos[\omega(t - z/c)]}{z} = \mathbf{e}_y \frac{\mu_0 I_0 b}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi' \cos \phi' \frac{\cos[\omega(t - z/c)]}{z},$$

wobei (siehe Abbildung)

$$z = \sqrt{r^2 + b^2 - 2rb \cos \psi} = \sqrt{r^2 + b^2 - 2rb \cos \phi' \sin \theta}.$$

In der Näherung $b \ll \lambda \ll r$:

$$z \approx r \left[1 - \frac{b}{r} \cos \phi' \sin \theta \right];$$

$$\cos[\omega(t - z/c)] \approx \cos[\omega(t - r/c)] - \frac{\omega b}{c} \cos \phi' \sin \theta \sin[\omega(t - r/c)];$$

und deswegen

$$\mathbf{A}(r, \theta, t) \approx \mathbf{e}_\phi \frac{\mu_0 m_0 \omega}{4\pi c r} \sin \theta \sin[\omega(t - r/c)].$$

Aus $\mathbf{A}$ erhalten wir die Felder

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \approx \mathbf{e}_\phi \frac{\mu_0 m_0 \omega^2}{4\pi c r} \sin \theta \cos[\omega(t - r/c)],$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \approx -\mathbf{e}_\theta \frac{\mu_0 m_0 \omega^2}{4\pi c^2 r} \sin \theta \cos[\omega(t - r/c)].$$

Der Poynting-Vektor ist

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \approx \mathbf{e}_r \frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4}{16\pi^2 c^3 r^2} \sin^2 \theta \cos^2[\omega(t - r/c)].$$

Das Intensitätsprofil ist

$$\frac{dP}{d\Omega}[\theta, \varphi] = \langle \mathbf{S} \rangle \mathbf{e}_r r^2 = \frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c^3} \sin^2 \theta.$$

2. *Bestimmen Sie den Strahlungswiderstand. Drücken Sie das Ergebnis durch λ und b aus und vergleichen Sie es mit dem Strahlungswiderstand eines elektrischen Dipols.*

Die gesamte abgestrahlte Leistung beträgt

$$\langle P \rangle = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \frac{dP}{d\Omega}[\theta, \varphi] = \frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4}{12\pi c^3}.$$

Der Strahlungswiderstand erhalten wir von

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} I_0^2 R_s,$$

deswegen

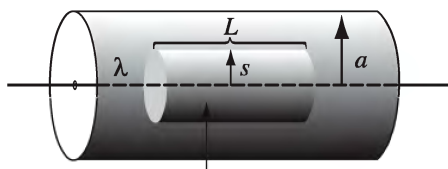
$$R_s = \frac{\mu_0 \pi b^4 \omega^4}{6c^3} = \frac{8}{3} \pi^5 \mu_0 c \frac{b^4}{\lambda^4} = 3.08 \times 10^5 \frac{b^4}{\lambda^4} \Omega.$$

Das ist viel kleiner als der Strahlungswiderstand eines elektrischen Dipols:

$$\frac{R_s^M}{R_s^E} = \frac{3.08 \times 10^5}{789.6} \frac{b^2}{\lambda^2} = 390 \frac{b^2}{\lambda^2} \ll 1.$$

2. Elektrische Verschiebung:

Ein langer gerader Draht trägt die gleichförmige Linienladung λ . Er ist bis zu einem Radius a von einer Gummiisolierung umgeben. Bestimmen Sie die elektrische Verschiebung.



In der Vorlesung wurde festgestellt, dass sich durch die Polarisation im Inneren des Dielektrikums Polarisationsladungen $\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P}$. Dann lässt sich innerhalb des Dielektrikums die gesamte Ladungsdichte als

$$\rho = \rho_p + \rho_e,$$

wobei ρ_e die freie (oder äußere) Ladungen beschreibt. Das Gauß'sche Gesetz nimmt die folgende Form an

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho = \rho_p + \rho_e = -\nabla \cdot \mathbf{P} + \rho_e.$$

Da die elektrische Verschiebung als $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ definiert ist, gilt es

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_e.$$

In integraler Form lautet dieses Gesetz:

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = Q,$$

Darin steht Q für die gesamte freie Ladung, die in dem Volumen enthalten ist.

Jetzt, zeichnen wir eine zylinderförmige Gauß'sche Oberfläche mit Radius s und Länge L und erhalten wir

$$2\pi s L D = \lambda L.$$

Daher ist

$$\mathbf{D} = \frac{\lambda}{2\pi s} \mathbf{e}_r.$$

Beachten Sie, dass diese Formel sowohl innerhalb des Isoliermaterials als auch außerhalb davon gilt. Außerhalb ist $\mathbf{P} = 0$ und daher

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{D} = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 s} \mathbf{e}_r, \quad s > a.$$

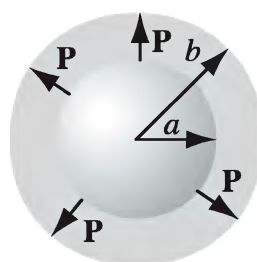
Innerhalb des Gummimaterials kann das elektrische Feld nicht bestimmt werden, denn dort kennen wir $\mathbf{P}$ nicht.

3. Elektrische Polarisation:

Eine dicke Kugelschale (mit Innenradius a und Außenradius b) bestegt aus einem dielektrischen Material mit "eingefrorenen" Polarisation

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \frac{A\mathbf{r}}{r^2}.$$

Darin ist A eine Konstante, und r ist die Entfernung vom Mittelpunkt. Es gibt in dieser Aufgabe keine freien Ladungen.



Bestimmen Sie in allen drei Gebieten das elektrische Feld mithilfe zweier unterschiedlicher Methoden:

- (a) Bestimmen Sie alle Polarisationsladungen und berechnen Sie das davon hervorgerufene Feld mithilfe des Gauß'schen Gesetzes.

Bestimmen wir erst die Polarisationsladung. Die induzierte Ladungsdichte ist

$$\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{A}{r} \right) = -\frac{A}{r^2}.$$

Die Oberflächendichte ist

$$\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = \begin{cases} +\mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_r = A/b, & (r = b) \\ -\mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_r = A/a, & (r = a) \end{cases}$$

Laut dem Gauß'schen Gesetz

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \mathbf{e}_r.$$

Darin steht Q für die *gesamte* Ladung, die in dem Volumen enthalten ist.

Für $r < a$ und $r > b$

$$Q = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} = 0.$$

Für $a < r < b$

$$Q = -\frac{A}{a} 4\pi a^2 - A \int_a^r dr' 4\pi (r')^2 \frac{1}{(r')^2} = -4\pi A r \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} = -\frac{A}{\epsilon_0 r} \mathbf{e}_r.$$

- (b) Bestimmen Sie die elektrische Verschiebung mithilfe des Gauß'schen Gesetzes und danach das elektrische Feld.

In integraler Form lautet dieses Gesetz:

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = Q_e,$$

Darin steht Q_e für die *gesamte freie* Ladung, die in dem Volumen enthalten ist.

Es gibt keine freie Ladungen in dieser Aufgabe, deswegen

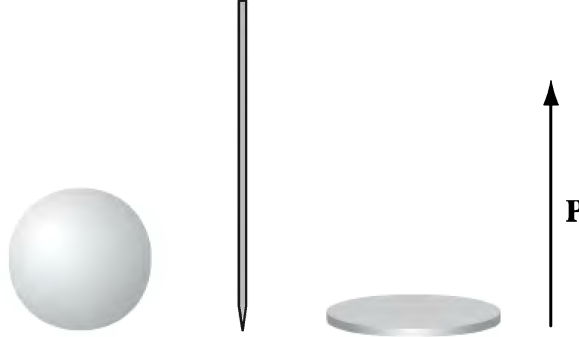
$$Q_e = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{D} = 0.$$

Das elektrische Feld finden wir als

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} = -\frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} = \begin{cases} 0, & (r < a) \\ -\mathbf{e}_r A / (\epsilon_0 r), & (a < r < b) \\ 0, & (r > b). \end{cases}$$

4. Elektrisches Feld in Dielektrikum:

Nehmen Sie an, das Feld im Inneren eines großen Bereichs eines Dielektrikums sei $\mathbf{E}_0$, sodass die elektrische Verschiebung $\mathbf{D}_0 = \epsilon_0 \mathbf{E}_0 + \mathbf{P}$ beträgt.



- (a) Nun wird ein kleiner kugelförmiger Hohlraum aus dem Material herausgearbeitet. Drücken Sie das Feld im Mittelpunkt des Hohlraums durch $\mathbf{E}_0$ und $\mathbf{P}$ aus. Drücken Sie zudem die Verschiebung im Mittelpunkt des Hohlraums durch $\mathbf{E}_0$ und $\mathbf{P}$ aus.

Das elektrische Feld ist gleich $\mathbf{E}_0$ minus das Feld einer gleichförmigen polarisierten Kugel. Wenn die Polarisierung gleichförmig ist, gibt's keine Volumenladungsdichte $\rho_p = 0$. Die Oberflächendichte ist

$$\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = P \cos \theta.$$

Das resultierende Potential kann man entweder durch direkte Integration berechnen oder mit Hilfe der Separation der Variablen. Für den Innenraum haben wir

$$V(r < R, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta).$$

Im Außenraum haben wir

$$V(r > R, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta).$$

Weil das Potential bei $r = R$ stetig ist, finden wir

$$B_l = A_l R^{2l+1}.$$

Die radiale Ableitung von V an der Oberfläche erfährt eine Unstetigkeit (d.h., das E-Feld erfährt einen Sprung)

$$\left. \frac{\partial V}{\partial r} \right|_{r=R+0} - \left. \frac{\partial V}{\partial r} \right|_{r=R-0} = -\frac{1}{\epsilon_0} \sigma_p(\theta).$$

Daher ist

$$A_1 = \frac{P}{3\epsilon_0}, \quad A_{l \neq 1} = 0.$$

Das Potential ist dann

$$V(r, \theta) = \frac{P}{3\epsilon_0} \cos \theta \begin{cases} r, & r < R, \\ R^3/r^2, & r > R. \end{cases}$$

Das Feld im Inneren der Kugel ist dann gleichförmig

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{1}{3\epsilon_0} \mathbf{P}.$$

Jetzt können wir das Feld im Hohlraum bestimmen.

Das elektrische Feld beträgt

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \frac{1}{3\epsilon_0} \mathbf{P}.$$

Deswegen

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} = \epsilon_0 \mathbf{E}_0 + \frac{1}{3} \mathbf{P} = \mathbf{D}_0 - \frac{2}{3} \mathbf{P}.$$

- (b) *Wiederholen Sie diese Rechnungen für einen langen, nadelförmigen Hohlraum, der Parallel zu $\mathbf{P}$ verläuft.*

Das elektrische Feld ist gleich $\mathbf{E}_0$ minus das Feld zweier Ladungen, die sich am Ende der “Nadel” befinden. Diese sind klein und (unendlich) weit weg, deswegen beträgt das elektrische Feld

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0.$$

Deswegen

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} = \epsilon_0 \mathbf{E}_0 = \mathbf{D}_0 - \mathbf{P}.$$

- (c) *Wiederholen Sie diese Rechnungen für einen dünnen scheibenförmigen Hohlraum, auf dem $\mathbf{P}$ senkrecht steht.*

Das elektrische Feld ist gleich $\mathbf{E}_0$ minus das Feld eines Kondensators mit Plattenladungsdichte $\sigma = P$. Dieses Feld wurde in Vorlesung besprochen. Es ist $-P/\epsilon_0$. Deswegen beträgt das elektrische Feld:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{P}.$$

Deswegen

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} = \epsilon_0 \mathbf{E}_0 + \mathbf{P} = \mathbf{D}_0.$$