

Klassische Theoretische Physik III WS 2020/2021

Prof. Dr. M. Garst
Dr. B. NarozhnyBlatt 13
Lösungen

1. Spiegelladungen im Dielektrikum:

Eine Punktladung q befindet sich auf der z -Achse bei $z = d$. Der Halbraum $z > 0$ wird von einem Dielektrikum mit Dielektrizitätskonstante ϵ_1 ausgefüllt, der Halbraum $z < 0$ von einem Medium mit Dielektrizitätskonstante ϵ_2 .

- (a) Verwenden Sie die Methode der Spiegelladungen, um das elektrostatische Potential im gesamten Raum zu finden. Bestimmen Sie den Wert der Spiegelladungen mit Hilfe der Randbedingungen.

Um das Potential im Halbraum $z > 0$ zu finden, platzieren wir eine Spiegelladung q' bei $z = -d$. Unter Verwendung von Zylinderkoordinaten hat das Potenzial folgende Form

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \left(\frac{q}{\sqrt{\rho^2 + (d-z)^2}} + \frac{q'}{\sqrt{\rho^2 + (d+z)^2}} \right), \quad z > 0.$$

Für den Bereich $z < 0$ entspricht das Potenzial dem einer Ladung q'' bei $z = d$.

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_2} \left(\frac{q''}{\sqrt{\rho^2 + (d-z)^2}} \right), \quad z < 0.$$

Bei $z = 0$ gelten die folgenden Randbedingungen:

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} \begin{pmatrix} \epsilon_1 E_z \\ E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \lim_{z \rightarrow 0^-} \begin{pmatrix} \epsilon_2 E_z \\ E_x \\ E_y \end{pmatrix}.$$

Mit

$$\left. \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (d-z)^2}} \right|_{z=0} = - \left. \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (d+z)^2}} \right|_{z=0} = \frac{d}{(\rho^2 + d^2)^{3/2}}$$

und

$$\left. \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (d-z)^2}} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (d+z)^2}} \right|_{z=0} = - \frac{\rho}{(\rho^2 + d^2)^{3/2}}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} q - q' &= q'' \\ \frac{1}{\epsilon_1}(q + q') &= \frac{1}{\epsilon_2}q'' \end{aligned}$$

Dies liefert:

$$q' = \left(\frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_2 + \epsilon_1} \right) q$$

$$q'' = \left(\frac{2\epsilon_2}{\epsilon_2 + \epsilon_1} \right) q$$

und

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_1} \left(\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (d-z)^2}} + \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (d+z)^2}} \right), \quad z > 0, \quad (1)$$

$$\Phi = \frac{q}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \left(\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (d-z)^2}} \right), \quad z < 0. \quad (2)$$

Grenzfälle:

- $\epsilon_1 = \epsilon_0, \epsilon_2 = \infty$ (Vakuum + Metall):

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (d-z)^2}} - \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (d+z)^2}} \right), \quad z > 0, \quad (3)$$

$$\Phi = 0, \quad z < 0. \quad (4)$$

- $\epsilon_1 = \epsilon_2$:

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_1} \left(\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (d-z)^2}} \right), \quad z > 0, \quad (5)$$

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_1} \left(\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (d-z)^2}} \right), \quad z < 0. \quad (6)$$

$$(7)$$

- (b) *Bestimmen Sie die induzierte Ladungsverteilung (gegeben durch die Divergenz der Polarizationm, $\nabla \cdot \mathbf{P}$), sowie die gesamte induzierte Ladung.*

Es gilt

$$\sigma_{\text{geb}} = -(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) \mathbf{n}_{21}.$$

Mit

$$\mathbf{P}_i = (\epsilon_i - \epsilon_0) \mathbf{E}_i = (\epsilon_i - \epsilon_0) \nabla \Phi(0^\pm)$$

erhält man

$$\sigma_{\text{geb}} = -\frac{q}{2\pi} \frac{\epsilon_0(\epsilon_2 - \epsilon_1)}{\epsilon_1(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \frac{d}{(\rho^2 + d^2)^{3/2}}$$

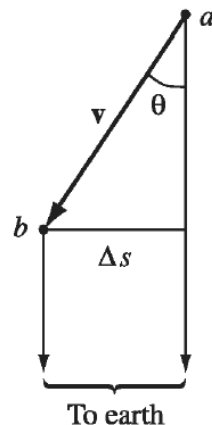
$$Q_{\text{geb}} = \int \sigma_{\text{geb}} dA = -q \frac{\epsilon_0(\epsilon_2 - \epsilon_1)}{\epsilon_1(\epsilon_1 + \epsilon_2)}$$

Grenzfall $\epsilon_1 = \epsilon_0, \epsilon_2 = \infty$ (Vakuum + Metall): $Q_{\text{geb}} = -q$.

2. Lichtgeschwindigkeit:

(20 Punkte)

Alle 2 Jahre veröffentlicht die New York Times einen Artikel, in dem irgendein Astronom behauptet, ein Objekt gefunden zu haben, das sich schneller als mit Lichtgeschwindigkeit bewegt. Viele dieser Berichte resultieren aus dem Versäumnis, das Gesehene vom Beobachteten zu unterscheiden, d.h. aus dem Versäumnis, die Lichtlaufzeit zu berücksichtigen.



Hier ist ein Beispiel: Ein Stern bewegt sich mit der Geschwindigkeit v in einem Winkel θ zur Sichtlinie (siehe Abbildung). Wie groß ist seine scheinbare Geschwindigkeit über den Himmel? (Nehmen wir an, das Lichtsignal von b erreicht die Erde mit einer Zeitverzögerung Δt später als das Lichtsignal von a . Der Stern hat sich in der Zwischenzeit eine Strecke Δs über die Himmelskugel bewegt. Mit "scheinbarer Geschwindigkeit" meinen wir $\Delta s / \Delta t$). Welcher Winkel θ ergibt die maximale scheinbare Geschwindigkeit? Zeigen Sie, dass die scheinbare Geschwindigkeit viel größer als c sein kann, auch wenn v selbst kleiner als c ist.

Lichtsignal verlässt a zur Zeit t'_a ; kommt zur Zeit $t_a = t'_a + d_a/c$ auf der Erde an.

Lichtsignal verlässt b zur Zeit t'_b ; kommt zur Zeit $t_b = t'_b + d_b/c$ auf der Erde an.

Davon folgt

$$\Delta t = t_b - t_a = t'_b - t'_a + \frac{d_b - d_a}{c} = \Delta t' - \frac{v}{c} \Delta t' \cos \theta = \Delta t' \left[1 - \frac{v}{c} \cos \theta \right].$$

(Hier ist d_a die Entfernung von a zur Erde und d_b die Entfernung von b zur Erde).

Die "scheinbare Geschwindigkeit" finden wir von

$$\Delta s = v \Delta t' \sin \theta = v \Delta t \frac{\sin \theta}{1 - \frac{v}{c} \cos \theta},$$

sodass

$$u = v \frac{\sin \theta}{1 - \frac{v}{c} \cos \theta}.$$

Die maximale scheinbare Geschwindigkeit finden wir mithilfe der Ableitung

$$\frac{du}{d\theta} = v \left[\frac{\cos \theta}{1 - \frac{v}{c} \cos \theta} - \frac{v}{c} \frac{\sin^2 \theta}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right)^2} \right] \rightarrow 0$$

Das ergibt

$$\cos \theta_{\max} = \frac{v}{c}.$$

Die maximale scheinbare Geschwindigkeit ist dann

$$u(\theta_{\max}) = \frac{v}{1 - v^2/c^2}.$$

Das kann unendlich groß sein, weil

$$v \rightarrow c \quad \Rightarrow \quad u \rightarrow \infty.$$

3. Relativistische Elektrodynamik

- (a) *Eine Punktladung q ruht im System $\mathcal{S}_0$ im Ursprung. Wie lautet das elektrische Feld derselben Ladung im System $\mathcal{S}$, welches sich nach rechts mit der Geschwindigkeit v_0 relativ zu $\mathcal{S}_0$ bewegt?*

Im $\mathcal{S}_0$ lautet das Feld:

$$\mathbf{E}_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\mathbf{r}}{r^3},$$

bzw.

$$E_{x0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qx_0}{(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)^{3/2}},$$

$$E_{y0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qy_0}{(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)^{3/2}},$$

$$E_{z0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qz_0}{(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)^{3/2}}.$$

Aufgrund des Transformationsgesetzes haben wir

$$E_x = E_{x0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qx_0}{(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)^{3/2}},$$

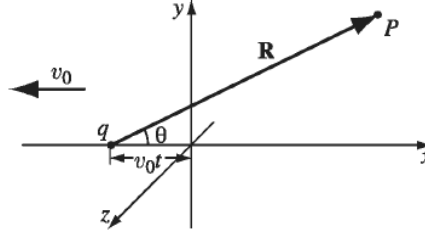
$$E_y = \gamma_0 E_{y0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma_0 q y_0}{(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)^{3/2}},$$

$$E_z = \gamma_0 E_{z0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma_0 q z_0}{(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)^{3/2}}.$$

Sie werden immer noch durch die Koordinaten des Feldpunkts P (x_0, y_0, z_0) aus $\mathcal{S}_0$ ausgedrückt. Wir bevorzugen die Schreibweise mit den $\mathcal{S}$ -Koordinaten von P . Aus den Lorentz-Transformationen (oder genauer, den inversen Transformationen) erhalten wir

$$x_0 = \gamma_0(x + v_0 t) = \gamma_0 R_x, \quad y_0 = y = R_y, \quad z_0 = z = R_z.$$

Hier ist jeweils $\mathbf{R}$ der Vektor von q nach P , siehe Abbildung.



Daher ist

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma_0 q \mathbf{R}}{(\gamma_0^2 R^2 \cos^2 \theta + R^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q (1 - v_0^2/c^2)}{[1 - (v_0^2/c^2) \sin^2 \theta]^{3/2}} \frac{\mathbf{R}}{R^3}.$$

- (b) *Bestimmen Sie das magnetische Feld einer Punktladung q , die sich mit konstanter Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ bewegt.*

Im Ruhesystem des Teilchens ($\mathcal{S}_0$) ist das magnetische Feld null, daher ist in einem System $\mathcal{S}$, das sich mit v nach rechts bewegt

$$\mathbf{B} = -\frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E}.$$

Das elektrische Feld haben wir in Aufgabe 1a berechnet. Das magnetische Feld ist dann

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qv_0 (1 - v_0^2/c^2) \sin \theta}{[1 - (v_0^2/c^2) \sin^2 \theta]^{3/2}} \frac{\mathbf{e}_\varphi}{R^2},$$

wobei $\mathbf{e}_\varphi$ in Gegenurzeigersinn weist, wenn die Ladung Ihnen entgegen kommt.

Interessanterweise reduziert sich das Ergebnis im nichtrelativistischen Fall ($v \ll c$) auf

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{R}}{R^3},$$

und das ist genau dasselbe Ergebnis, das Ihnen auch die naive Anwendung des Biot-Savart'schen Gesetzes auf eine Punktladung liefert.

- (c) *Bestätigen Sie, dass das Feld einer gleichförmig bewegten Punktladung dem Gauß'schen Gesetz gehorcht, indem Sie über eine Kugel mit Radius R integrieren, deren Mittelpunkt in der Ladung liegt.*

Benutzen wir das Ergebnis von Aufgabe 1a. Dann

$$\begin{aligned} \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} &= \frac{q(1 - v_0^2/c^2)}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{R^2 \sin \theta d\theta d\varphi}{R^2 [1 - (v_0^2/c^2) \sin^2 \theta]^{3/2}} \\ &= 2\pi \frac{q(1 - v_0^2/c^2)}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{[1 - (v_0^2/c^2) \sin^2 \theta]^{3/2}} = \frac{q}{\epsilon_0}. \end{aligned}$$

(d) Bestimmen Sie den Poynting-Vektor einer gleichförmig bewegten Punktladung.

$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\mu_0} = \frac{\mathbf{R} \times \mathbf{e}_\varphi}{(4\pi)^2 \epsilon_0 R^5} \frac{q^2 (1 - v_0^2/c^2)^2 v \sin \theta}{[1 - (v_0^2/c^2) \sin^2 \theta]^3} = -\frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 R^4} \frac{(1 - v_0^2/c^2)^2 v \sin \theta}{[1 - (v_0^2/c^2) \sin^2 \theta]^3}.$$

4. Elektromagnetische Wellen:

(a) Schreiben Sie das elektrische und magnetische Feld $\mathbf{E}(x, y, z, t)$ und $\mathbf{B}(x, y, z, t)$ auf.

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = E_0 \cos(kx - \omega t) \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{B}(x, y, z, t) = \frac{E_0}{c} \cos(kx - \omega t) \mathbf{e}_z, \quad k \equiv \frac{\omega}{c}.$$

(b) Dieselbe Welle wird aus dem Inertialsystem $\bar{\mathcal{S}}$ heraus beobachtet, das sich relativ zum ursprünglichen System $\mathcal{S}$ mit Geschwindigkeit v in x -Richtung bewegt. Bestimmen Sie das elektrische und magnetische Feld in $\bar{\mathcal{S}}$ und drücken Sie durch die Koordinaten in $\bar{\mathcal{S}}$ aus: $\bar{\mathbf{E}}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$ und $\bar{\mathbf{B}}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$.

Aufgrund des Transformationsgesetzes haben wir

$$\bar{E}_x = \bar{E}_z = 0, \quad \bar{E}_y = \gamma(E_y - vB_z) = \alpha E_0 \cos(kx - \omega t),$$

$$\bar{B}_x = \bar{B}_y = 0, \quad \bar{B}_z = \gamma(B_z - \frac{v}{c^2} E_y) = \alpha \frac{E_0}{c} \cos(kx - \omega t),$$

$$\alpha \equiv \gamma \left(1 - \frac{v}{c}\right) = \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}.$$

Aus den Lorentz-Transformationen (oder genauer, den inversen Transformationen) erhalten wir

$$x = \gamma(\bar{x} + v\bar{t}), \quad t = \gamma\left(\bar{t} + \frac{v}{c^2}\bar{x}\right),$$

deswegen

$$kx - \omega t = \bar{k}\bar{x} - \bar{\omega}\bar{t}, \quad \bar{k} \equiv \gamma\left(k - \frac{\omega v}{c^2}\right) = \alpha k, \quad \bar{\omega} \equiv \gamma\omega\left(1 - \frac{v}{c}\right) = \alpha\omega.$$

Letztendlich finden wir

$$\bar{\mathbf{E}}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}) = \bar{E}_0 \cos(\bar{k}\bar{x} - \bar{\omega}\bar{t}) \mathbf{e}_y, \quad \bar{\mathbf{B}}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}) = \frac{\bar{E}_0}{c} \cos(\bar{k}\bar{x} - \bar{\omega}\bar{t}) \mathbf{e}_z, \quad \bar{E}_0 = \alpha E_0.$$

- (c) Welche Frequenz $\bar{\omega}$ hat die Welle in $\bar{\mathcal{S}}$? Interpretieren Sie dieses Ergebnis. Welche Wellenlänge $\bar{\lambda}$ hat die Welle in $\bar{\mathcal{S}}$? Bestimmen Sie anhand von $\bar{\omega}$ und $\bar{\mathcal{S}}$ die Geschwindigkeit der Wellen in $\bar{\mathcal{S}}$. Entspricht das Ergebnis Ihren Erwartungen?

$$\bar{\omega} = \omega \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}.$$

Das ist der Doppler-Effekt für Licht.

$$\bar{\lambda} = \frac{2\pi}{\bar{k}} = \frac{\lambda}{\alpha}.$$

Die Geschwindigkeit der Wellen in $\bar{\mathcal{S}}$ ist

$$\bar{v} = \frac{\bar{\omega}}{2\pi} \bar{\lambda} = c.$$

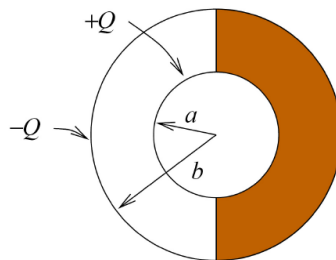
- (d) Wie groß ist das Intensitätsverhältnis zwischen $\mathcal{S}$ und $\bar{\mathcal{S}}$? Als Jugendlicher soll sich Einstein gefragt haben, wie eine elektromagnetische Well aussehen würde, wenn man mit Lichtgeschwindigkeit neben ihr her laufen könnte. Was könnten Sie ihm, für den Fall $v \rightarrow c$, über Amplitude, Frequenz und Intensität der Welle sagen?

Weil $I \sim E^2$, finden wir

$$\frac{\bar{I}}{I} = \frac{\bar{E}_0^2}{E_0^2} = \alpha^2 = \frac{1 - v/c}{1 + v/c}.$$

Bonusaufgabe. Kugelkondensator:

Zwei Leiter in der Form konzentrischer Hohlkugeln mit den Radien a, b mit $a < b$ tragen die Ladung $\pm Q$. Der Raum zwischen den Kugeln ist zur Hälfte mit einem Dielektrikum mit Dielektrizitätskonstante $\epsilon = \epsilon_0(1 + \chi_e)$ gefüllt.



- (a) Berechnen Sie das elektrische Feld $\mathbf{E}$ im gesamten Raum zwischen den beiden Kugeln.

Ohne das Dielektrikum wäre das elektrische Feld zwischen den beiden Kugeln radial. Man kann nicht annehmen, dass sich das durch das Dielektrikum nicht ändert.

Jedoch ist das elektrische Feld mit Sicherheit tangential zur Fläche zwischen den Regionen mit und ohne Dielektrikum. Somit ist die Bedingung $E_1^{\parallel} = E_2^{\parallel}$ automatisch erfüllt. Da es keine Komponente senkrecht zur Grenzfläche gibt, ist die Bedingung $D_1^{\perp} = D_2^{\perp}$ automatisch erfüllt. Somit können wir einen Ansatz der folgenden Form wählen.

$$\mathbf{E} = c \frac{\mathbf{e}_r}{r^2}$$

Wir benutzen den Gauss'schen Satz verwenden, um die Konstante c zu bestimmen.

$$\int \mathbf{D} d\mathbf{A} = Q \quad \rightarrow \quad \frac{\epsilon_0 c}{r^2} (2\pi r^2) + \frac{\epsilon c}{r^2} (2\pi r^2) = Q$$

Somit erhalten wir

$$c = \frac{Q}{2\pi(\epsilon + \epsilon_0)}$$

- (b) Berechnen Sie die Oberflächenladungsdichte der freien Ladungsträger σ_{frei} auf der inneren Kugel.

Die Oberflächenladungsdichte ist gegeben durch $\sigma = D^{\perp}|_{r=a}$ wobei $D^{\perp} = \epsilon_0 E^{\perp}$ oder $D^{\perp} = \epsilon E^{\perp}$ gilt, abhängig von der Region. Somit erhalten wir

$$\sigma = \begin{cases} \frac{\epsilon}{\epsilon + \epsilon_0} \frac{Q}{2\pi a^2}; & \text{dielektrische Hälfte} \\ \frac{\epsilon_0}{\epsilon + \epsilon_0} \frac{Q}{2\pi a^2}; & \text{leere Hälfte} \end{cases}$$

- (c) Berechnen Sie die durch die Polarisation $\mathbf{P} = \chi_e \mathbf{E}$ induzierte Ladungsdichte σ_{geb} auf der Oberfläche des Dielektrikums bei $r = a$.

Die Polarisationsladungsdichte ist gegeben durch

$$\rho_{\text{geb}} = -\nabla \cdot \mathbf{P}$$

Ausserhalb des Dielektrikums ist die Polarisation natürlich null. Mit dem Gauss'schen Satz erhalten wir

$$\sigma_{\text{geb}} = -P^{\perp}|_{r=a} = -\chi_e E^{\perp}|_{r=a} = -\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + \epsilon_0} \frac{Q}{2\pi a^2}$$