Klassische Theoretische Physik III (Theorie C)

Vorlesung: Prof. Dr. K. Melnikov – Übung: Dr. R. Haindl

Übungsblatt 1

Ausgabe: 24.10.2022 – Abgabe: 31.10.2022 12:00

Tutorium: 2.11.2022

Aufgabe 1: Gradient, Divergenz, Rotation (3 Punkte)

In dieser Aufgabe sollen Sie verschiedene Vektoridentitäten überprüfen. Die Identitäten lassen sich viel einfacher und schneller beweisen, indem man zu der Indexschreibweise übergeht. Sie finden eine Einleitung und nützliche Formeln am Ende dieses Blattes.

(a) Betrachten Sie den totalen anti-symmetrischen Levi-Civita Tensor ε^{ijk}. Gegeben sei $\varepsilon^{123} = 1$. Berechnen Sie

$$\text{(i)} \quad \varepsilon^{12i}\varepsilon^{21i} \qquad \text{(ii)} \quad \delta^{ij}\varepsilon^{ijk} \tag{1.1}$$

(b) Für eine orthonormale Basis gilt

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}, \tag{1.2}$$

wobei $\vec{e}_i$ und $\vec{e}_j$ Einheitsvektoren sind, z.B. $\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = 0$ (kartesisch) und $\vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_\theta = 1$ (sphärisch). Wir schreiben einen Vektor in sphärischen Koordinaten

$$\vec{v} = \sum_{i=r,\phi,\theta} v_i \vec{e}_i = v_r \vec{e}_r + v_\phi \vec{e}_\phi + v_\theta \vec{e}_\theta \,. \tag{1.3}$$

Wie können Sie die Eigenschaft der Orthonormalität, Gl. (1.2), verwenden um die Koordinate v_ϕ zu bestimmen?

(c) Gegeben seien eine skalare Funktion $\phi(\vec{r})$ und ein Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$. Zeigen Sie, dass gilt

$$\text{(i)} \quad \vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\phi(\vec{r}) = 0, \tag{1.4}$$

$$\text{(ii)} \quad \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0, \tag{1.5}$$

$$\text{(iii)} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\phi(\vec{r}) = \triangle\phi(\vec{r}), \tag{1.6}$$

$$\text{(iv)} \quad \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r})) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r})) - \triangle\vec{A}(\vec{r}), \tag{1.7}$$

wobei der Vektoroperator $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ der Gradient in kartesischen Koordinaten ist und $\triangle \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ für den Laplace-Operator steht. Denken Sie daran, dass Operatoren im Allgemeinen nicht kommutieren. Beachten Sie, dass $\vec{\nabla}\phi(\vec{r})$ und $\triangle\vec{A}(\vec{r})$ Vektorgrößen mit drei Komponenten sind während $\triangle\phi(\vec{r})$ und $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ Skalare sind.

(d) Zeigen Sie, dass gilt ($r \equiv |\vec{r}\,| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$):

$$\text{(i)} \quad \vec{\nabla} r = \frac{\vec{r}}{r}, \qquad \text{(ii)} \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{r} = 3, \qquad \text{(iii)} \quad \vec{\nabla}\times\vec{r} = 0,$$

$$\text{(iv)} \quad \vec{\nabla}_r \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} = -3 \;\; \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^5}, \qquad \text{(v)} \quad \triangle\phi(r) = \phi''(r) + \frac{2}{r}\phi'(r), \tag{1.8}$$

wobei $\phi'(r) = \frac{\partial}{\partial r}\phi(r)$ und $\phi''(r) = \frac{\partial^2}{\partial r^2}\phi(r)$.

Aufgabe 2: Einheitsvektoren und zylindrische Koordinaten (2 Punkte)

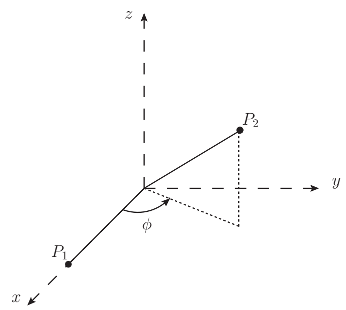

Abbildung 1: Zwei Punkte P_1 und P_2 in einem Koordinatsystem.

(a) Kopieren Sie die Abbildung 1. Skizzieren Sie die zylindrischen Basisvektoren in den Punkte P_1 und P_2. *Hinweis:* Sie finden eine Einführung zur Vektoranalyse in "David J. Griffiths: Elektrodynamik - Eine Einführung" Kapitel 1.

(b) Drücken Sie die zylindrischen Basisvektoren $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z$ in Abhängigkeit von $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ aus. Überprüfen Sie die Orthonormalität der zylindrischen Basisvektoren.

(c) Kehren Sie dann Ihre Formeln um und drücken Sie $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ in Abhängigkeit von $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z$ aus.

Aufgabe 3: Flächenintegrale und Gauß'scher Satz (3 Punkte)

In dieser Aufgabe betrachten wir folgendes Vektorfeld

$$\vec{v} = y\vec{e}_x + x\vec{e}_y - 3z\vec{e}_z\,. \tag{3.1}$$

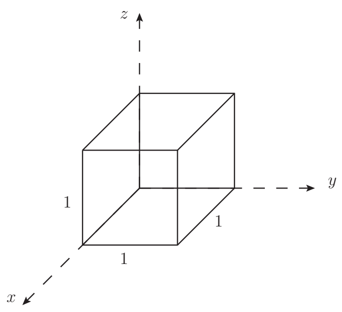

Abbildung 2: Einheitskubus

(a) Schreiben Sie die Oberflächenelemente $\mathrm{d}\vec{S}$ für alle Seiten des Würfels in Abbildung 2. Ein Oberflächenelement ist eine infinitesimal kleine Fläche, deren Richtungsvektor senkrecht auf der Fläche steht. Wir benutzen die Konvention, dass die nach außen führende Richtung positiv ist.

(b) Berechnen Sie den Fluss durch die obere Fläche des Würfels in Abbildung 2,

$$\int_{\text{Oberseite}} \mathrm{d}\vec{S} \cdot \vec{v}\,. \tag{3.2}$$

(c) Zeigen Sie, dass sich das Vektorfeld in Zylinderkoordinaten wie folgt

$$\vec{v} = \rho \sin(2\phi)\, \vec{e}_\rho + \rho \cos(2\phi)\, \vec{e}_\phi - 3z\vec{e}_z \tag{3.3}$$

schreiben lässt.

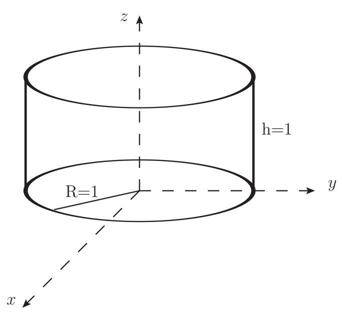

Abbildung 3: Zylinder mit Radius $R = 1$ und Höhe $h = 1$.

(d) Schreiben Sie die Oberflächenelemente $\mathrm{d}\vec{S}$ für alle Seiten des Zylinders in Abbildung 3.

(e) Berechnen Sie den Fluss durch die Seitenfläche des Zylinders.

(f) Verifizieren Sie den Gaußschen Satz

$$\oint_{\partial V} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{v})\, \mathrm{d}^3 r \tag{3.4}$$

für den Würfel und den Zylinder.

Aufgabe 4: Wegintegrale. Stokesscher Satz (2 Punkte)

Gegeben seien die zwei Vektorfelder:

$$\text{(i)}\vec{A}_1(\vec{r}\,) = (x-y, x, 0)^T\,, \tag{4.1}$$

$$\text{(ii)}\vec{A}_2(\vec{r}\,) = \frac{\vec{r}}{r^2}. \tag{4.2}$$

und zwei Wege $\vec{r}(\phi) = R(\cos\phi, \sin\phi, 0)^T$ mit $\phi \in [\pi, 0]$ und $\phi \in [\pi, 2\pi]$.

(a) Skizzieren Sie der Verschiebungsvektor, d$\vec{r}$, entlang der zwei Wege für die Winkel $\phi = \pi/4$ bzw. $\phi = 11/6\pi$.

(b) Berechnen Sie die Wegintegrale $\int_C \vec{A}_i(\vec{r}\,)\cdot d\vec{r}$, $i = 1, 2$ entlang der beiden Wege

(c) Verifizieren Sie den Stokesschen Satz

$$\oint_{\partial F} \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int_F (\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot d\vec{f} \tag{4.3}$$

für den Fall, dass $\vec{A} = \vec{A}_i$ $(i = 1, 2)$ aus (a) und dass der Weg ∂F einen Kreis in der xy-Ebene mit Radius R und Mittelpunkt im Ursprung beschreibt.

Appendix

Viele Vektoridentitäten lassen sich viel einfacher und schneller beweisen, indem man zu der Indexschreibweise übergeht und jedes Skalar- bzw. Kreuzprodukt durch ein Kronecker-Delta δ^{ij} bzw. den vollständig antisymmetrischen Tensor ε^{ijk} ausdrückt. Es gilt

$$(\vec{a}\times\vec{b})^i = \varepsilon^{ijk}a^j b^k, \quad \vec{a}\cdot\vec{b} = \delta^{ij}a^i b^j, \quad \vec{\nabla}^i r^j = \delta^{ij}, \quad \delta^{ij} = \delta^{ji}, \quad \delta^{ii} = 3, \tag{0.1}$$

$$\varepsilon^{ijk} = \varepsilon^{kij} = \varepsilon^{jki} = -\varepsilon^{jik} = -\varepsilon^{ikj} = -\varepsilon^{kji}, \quad \varepsilon^{ijk}\varepsilon^{ilm} = \delta^{jl}\delta^{km} - \delta^{jm}\delta^{kl} \tag{0.2}$$

$$\varepsilon^{ilm}\varepsilon^{jlm} = 2\delta^{ij}, \quad \delta^{ij}\delta^{jk} = \delta^{ik}, \quad \delta^{ik}\varepsilon^{jkl} = \varepsilon^{jil} \tag{0.3}$$

Im Umgang mit den Indizes gilt dabei die Einsteinsche Summenkonvention: Über doppelt auftretende Indizes wird summiert und es dürfen in keinem Term mehr als zwei gleiche Indizes vorkommen. Zum Beispiel hat man

$$(\vec{a}\cdot\vec{b})^2 = \delta^{ij}a^i b^j \delta^{kl}a^k b^l, \tag{0.4}$$

wobei wir hier neue Indizes k und l eingeführt haben, da ansonsten i und j jeweils vierfach vorkommen würden und die Einsteinsche Summenkonvention verletzt wäre. Die Ihnen bereits bekannte "BAC-CAB"-Regel, lässt sich in der Indexschreibweise folgendermaßen beweisen

$$\begin{aligned}(\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}))^i &= \varepsilon^{ijk}a^j(\vec{b}\times\vec{c})^k = \varepsilon^{ijk}a^j\varepsilon^{klm}b^l c^m = \varepsilon^{kij}\varepsilon^{klm}a^j b^l c^m \\ &= (\delta^{il}\delta^{jm} - \delta^{im}\delta^{jl})a^j b^l c^m = b^i a^j c^j - c^i a^l b^l = b^i(\vec{a}\cdot\vec{c}) - c^i(\vec{a}\cdot\vec{b}) \\ &\Rightarrow (\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})) = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b}) \end{aligned} \tag{0.5}$$