Klassische Theoretische Physik III (Theorie C)

Vorlesung: Prof. Dr. K. Melnikov – Übung: Dr. R. Haindl

Übungsblatt 3

Ausgabe: 7.11.2022 – Abgabe: 14.11.2022 12:00

Saalübung: 15.11.2022 – Tutorium: 16.11.2022

Aufgabe 1: Koaxiales Kabel (3 Punkte)

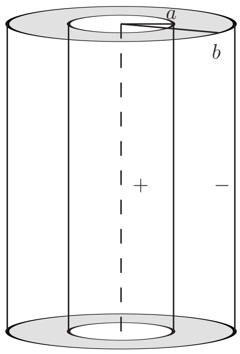

Abbildung 1: Ein koaxiales Kabel.

Ein langes koaxiales Kabel (Abbildung 1) trägt auf dem inneren Zylinder (mit Radius a) eine gleichförmige Volumenladungsdichte ρ und auf der äußeren zylindrischen Hülle (mit Radius b) eine gleichförmige Flächenladungsdichte. Diese Flächenladungsdichte ist negativ und hat gerade den richtigen Betrag, um das Kabel als Ganzes elektrisch neutral zu halten.

(a) Bestimmen Sie das elektrische Feld in jedem der drei Gebiete:
- im Inneren des inneren Zylinders ($r < a$)
- zwischen den Zylindern ($a < r < b$)
- außerhalb des Kabels ($b < r$)

(b) Zeichnen Sie $|\vec{E}|$ als Funktion von r.

(c) Bestimmen Sie durch ein Wegintegral die Potenzialdifferenz zwischen einem Punkt auf der Achse und einem Punkt auf dem äußeren Zylinder.

Aufgabe 2: Homogen geladener dünner Stab (3 Punkte)

Betrachten Sie einen homogen geladenen dünnen Stab (mit Ladung q) der Länge $2a$ mit der Ladungsverteilung

$$\rho(\vec{r}) = k\,\delta(x)\,\delta(y)\,\theta(a - |z|)\,. \tag{2.1}$$

(a) Berechnen Sie k aus der totalen Ladung $q = \int \mathrm{d}^3 r\, \rho(\vec{r})$.

(b) Berechnen Sie das Potenzial der Ladungsverteilung $\varphi(s, z)$ in Zylinderkoordinaten, wobei s die radielle Komponente ist. Bestimmen Sie den Zusammenhang zwischen s and z für ein konstantes Potenzial. *Hinweis:* Für das Integral werden Sie die Identität $\operatorname{arcsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ nützlich finden. Um die Bedingungen für ein konstantes Potenzial zu finden, ist es nützlich folgende Variablen einzuführen, $z_\pm = z \pm a$, $r_\pm = \sqrt{x^2 + y^2 + z_\pm^2}$, und die Gleichung $\frac{r_- + z_-}{r_+ + z_+} = \frac{r_+ - z_+}{r_- - z_-}$ zu benutzen.

(c) Berechnen Sie das zugehörige elektrische Feld.

(d) Skizzieren Sie die Äquipotenzialflächen und die Feldlinien.

Aufgabe 3: Sphärische Symmetrie und Elektronenwolke (4 Punkte)

Betrachten Sie eine sphärische symmetrische Ladungsdichte $\rho(\vec{r}) = \rho(r)$.

(a) Bestimmen Sie mit dem Gauß'schen Gesetz das elektrische Feld. Es ist durch ein Integral über r auszudrücken.

In den Vorlesungen haben Sie gesehen wie sich das elektrische Potenzial einer Ladungsverteilung ausdrücken lässt:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\, \mathrm{d}^3 r'\,. \tag{3.1}$$

(b) Benutzen Sie die obige Formel um das Potenzial zu berechnen. Warum können Sie den Vektor $\vec{r}$ in Richtung $\vec{e}_z$ zeigen lassen? Überprüfen Sie Ihr Resultat mit der Identität $\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\varphi(\vec{r})$.

Für ein Wasserstoffatom im Grundzustand ist die Ladungsdichte des Elektrons durch

$$\rho(r) = -\frac{e}{\pi a^3} \exp\left(-\frac{2r}{a}\right) \tag{3.2}$$

gegeben. e ist die Elementarladung und a ist der Bohrradius.

(c) Berechnen Sie das Potenzial und das elektrische Feld für das Elektron.

(d) Wir können den Nukleus als eine Punktladung im Koordinatenursprung betrachten. Was ist denn das totale Potenzial und totale elektrische Feld?