Klassische Theoretische Physik III (Theorie C)

Vorlesung: Prof. Dr. K. Melnikov – Übung: Dr. R. Haindl

Übungsblatt 6

Ausgabe: 28.11.2022 – Abgabe: 5.12.2022 12:00

Saalübung: 6.12.2022 – Tutorium: 7.12.2022

Aufgabe 1: Kugel, Punktladung und Spiegelladung (4 Punkte)

In dieser Aufgabe betrachten wir eine leitende Kugel mit Radius R und Potential $\varphi_0 \neq 0$. Eine Punktladung q_a ist im Abstand $a > R$ vom Mittelpunkt der Kugel platziert. Wir wollen das Potential außerhalb der Kugel bestimmen. Das lässt sich durch zwei Spiegelladungen, q_b und q_c, entlang der Symmetrieachse machen. Wir platzieren die Spiegelladung q_b am Punkt $b = \frac{R^2}{a}$ zwischen dem Mittelpunkt der Kugel und der Position der Punktladung q_a, siehe Abbildung 1.

(a) Zeigen Sie, dass $b < R$ ist. Warum ist das wichtig?

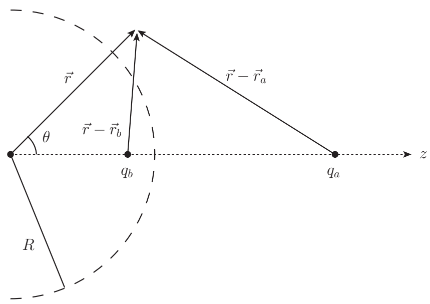

Abbildung 1: Die Positionen der zwei Punktladungen q_a und q_b.

Die drei Punktladungen erzeugen das Potential

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_a}{|\vec{r}-\vec{r}_a|} + \frac{q_b}{|\vec{r}-\vec{r}_b|} + \frac{q_c}{|\vec{r}-\vec{r}_c|}\right) . \tag{1.1}$$

Hierin sind $|\vec{r}-\vec{r}_a|$, $|\vec{r}-\vec{r}_b|$ und $|\vec{r}-\vec{r}_c|$ jeweils die Abstände von q_a, q_b und q_c.

(b) Platzieren Sie die letzte Spiegelladung und bestimmen Sie die Werte der zwei Spiegelladungen, um ein konstantes Potential auf der Oberfläche der Kugel zu erzeugen. *Hinweis:* Benutzen Sie den Kosinussatz.

(c) Bestimmen Sie die auf der Kugel induzierte Flächenladung als Funktion von θ durch

$$\sigma_{\text{induced}}(\theta) = -\epsilon_0 \frac{\partial\varphi}{\partial\vec{n}} , \tag{1.2}$$

wobei $\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{n}} = (\vec{\nabla}\varphi)\cdot\vec{e}_n$ die Normalenableitung ist. Integrieren Sie das Resultat, um die gesamte induzierte Ladung auf der Kugeloberfläche zu bestimmen.

(d) Welche Kraft wirkt aufgrund der Kugel auf q_a?

(e) Berechnen Sie die erforderliche Arbeit, um die Punktladung q_a aus unendlicher Entfernung zum Punkt a zu bringen.

Aufgabe 2: Eine fallende Ladung (3 Punkte)

Eine Punktladung q der Masse m wird aus dem Ruhestand mit einer Entfernung h über einer unendlichen leitenden Ebene losgelassen, siehe Abbildung 2.

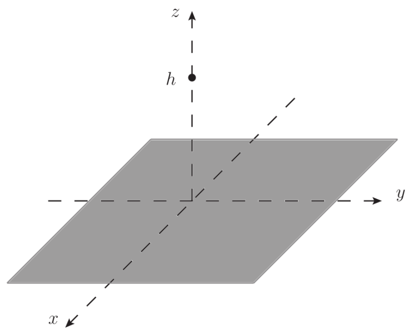

Abbildung 2: Fallende Punktladung über unendlich leitender Ebene.

(a) Zeigen Sie, dass sich die Geschwindigkeit der Ladung durch folgende Differenzialgleichung schrieben lässt,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\dot{z}^2\right) = -\frac{1}{16\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{m}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-\frac{1}{z}\right) , \tag{2.1}$$

wobei z die Distanz zur Ebene bezeichnet und $\dot{z} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$.

(b) Wie lange braucht die Ladung um die Platte zu erreichen?

Aufgabe 3: Unendliche Röhre (3 Punkte)

Eine unendliche, rechteckige Röhre, die parallel zur z-Achse ausgerichtet ist, besteht aus drei geerdeten leitenden Seiten (bei $y = 0$, $y = a$ und $x = 0$), die miteinander verschweißt sind. Die vierte Seite (bei $x = b$), die von den anderen isoliert ist, wird auf einem vorgegebenen Potential $\psi_0(y)$ gehalten.

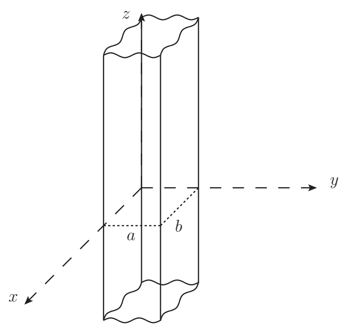

Abbildung 3: Eine unendliche, rechteckige Röhre.

(a) Zeigen Sie mittels Seperation der Variablen, dass das Potential innerhalb der Röhre gegeben ist durch,

$$\psi(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sinh\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right) \, , \tag{3.1}$$

wobei

$$\psi_n = \frac{2}{a \sinh\left(\frac{n\pi}{a}b\right)} \int_0^a \mathrm{d}y \, \sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right) \psi_0(y) \, . \tag{3.2}$$

(b) Bestimmen Sie das Potential für den Fall $\psi_0(y) = \psi_0 \frac{y}{a}$.